Kompleksiset konformikuvaukset

Pro gradu -tutkielma
Janne Valtonen
243019
Itä-Suomen yliopisto
20. marraskuuta 2013

Janne Valtonen *Kompleksiset konformikuvaukset*, 63 sivua
Itä-Suomen yliopisto
Matematiikan koulutusohjelma
Matematiikan aineenopettaja

Työn tarkistajat FT Janne Heittokangas
FT Jouni Rättyä

Tiivistelmä

Tutkielman lähtökohtana on konformiuden määritelmä lokaalien kulmien muuttumattomuuden avulla. Tästä seuraa puolestaan, että kompleksifunktion konformius on liittyy tiiviisti sen kompleksinen derivoitumiseen ja edelleen siihen, ettei derivaatalla ole nollakohtia. Näin ollen derivaatalle saadaan geometrisia tulkintoja myös siinä tapauksessa, ettei kuvaus ole konformi.

Erityisenä kuvaustyyppinä käsitellään Möbius-muunnoksia eli kompleksisia lineaarikuvauksia toisaalta laajennetun kompleksitason meromorfisina bijektioina ja taas toisaalta kompleksitason geometrisina muunnoksina. Tarkastelut liittävät tasogeometrian tulokset muun muassa kompleksilukujen algebrallisiin ominaisuuksiin. Lisäksi Möbius-muunnosten yhteydessä tutustutaan esiasteen kuvausongelmiin konstruoimalla lineaarikuvauksia tason kiekkojen ja puolitasojen välille.

Konformien kuvausongelmien tarkastelussa käsitellään tyhjentävästi yhdesti yhtenäisten alueiden tapaus. Näiden yhteydessä todistetaan Riemannin kuvauslauseena tunnettu tulos, joka antaa konformin bijektion tasoon aidosti sisältyvältä alueelta origokeskiselle yksikkökiekolle. Lisäksi tarkastellaan renkaiden tapausta, joka perustelee, ettei kuvauslauseen tulosta saada suoraan yleistettyä useasti yhtenäisille alueille.

Avainsanat: konformikuvaus, Joukowskin kuvaus, Möbius-muunnos, konformi ekvivalenssi, Riemannin kuvauslause, Schwarz-Christoffel, rengas.

Sisältö

Johdanto

Vaikka kompleksitaso $\mathbb{C}$ onkin samastettavissa kaksiulotteisen reaaliavaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa, kompleksianalyysi eroaa reaalisesta vastineestaan usealla ratkaisevalla tavalla, minkä todistaa jo ero reaalisen ja kompleksisen derivoituvuuden seurausten välillä. Esimerkiksi koko tasolla $\mathbb{C}$ derivoituva funktio on välttämättä vakio, mikäli se on rajoitettu. Kyseinen tulos tunnetaan *Liouvillen lauseena*. Vastaavasti *maksimiperiaatteen* nojalla modulin lokaali maksimi redusoi sekin derivoituvan funktion vakioksi.

Myös se, että kompleksitason $\mathbb{C}$ reaalinen dimensio on 2 eli koska jokainen $z \in \mathbb{C}$ on lausuttavissa muodossa

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

antaa jo itsessään kompleksiluvuille geometrisia ominaisuuksia. Erityisessä asemassa tämän tutkielman alkuasetelmaa on *Eulerin lause*, joka yhdistää kompleksiluvun z, sen modulin $|z|$ ja argumentin eli vaihekulman $\arg z$ esitykseen

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

Seurauksena saadaan muun muassa geometrinen tulkinta kahden kompleksiluvun tulolle: on nimittäin helppo todeta, että lineaarinen kuvaus

$$(\star) \qquad g_{r,\theta}(z) = re^{i\theta} z, \quad z \in \mathbb{C},$$

kiertää pistettä z origon ympäri kulman θ verran ja lisäksi r-kertaistaa sen modulin.

Yhtälön $(\star)$ mukaisen funktion käsittely on luonnollista pyrkiä yleistämään kysymällä, millaisia geometrisia ominaisuuksia kompleksifunktioilla yleisesti on. Tarkastelu johtaa *konformiuden* käsitteeseen. Yleisesti kuvauksen konformius määritellään lokaalin struktuurin ja erityisesti kulmien säilymisen avulla. Tässä tutkielmassa lähtökohtana on Rudinin teoksen [8] konformiuden määritelmä, jonka mukaan konformikuvaus käyttäytyy lokaalisti kuin tyypin $(\star)$ kuvaus. Luvussa 1 etsitään yhteys parametrien r ja θ sekä itse kuvauksen välille. Lisäksi tutkitaan muita konformikuvausten perusominaisuuksia.

Luku 2 on omistettu *Möbius-muunnoksille*, yhdelle tärkeimmistä konformikuvausten tyypeistä. Tarkastelu aloitetaan *laajennetun kompleksitason* käsitteellä, mistä edetään määrittelemään Möbius-muunnokset meromorfisina bijektioina tältä itselleen. Toisaalta osoittautuu, että Möbius-muunnokset saadaan yhdistettyinä kuvauksina tason geometrisista kuvauksista, ja täten ne perivät näiden perusominaisuuksia, kuten kolmen pisteen säännön.

Itse konformikuvausten lisäksi voidaan myös tarkastella alueita itsejään ja kysyä, millä ehdoin alue on kuvattavissa toiseksi konformisti. Kysymykseen yhden vastauksen antoi Bernhard Riemann[1], jonka mukaan nimetty, Luvussa 3 käsiteltävä *Riemannin kuvauslause* takaa konformin bijektion kahden tasoon aidosti sisältyvät *yhdesti yhtenäisen* alueen välille. Jo itsessään se, ettei tasoa $\mathbb{C}$ voi kuvata konformisti kiekolle $\mathbb{D}$ itsessään Liouvillen lauseen nojalla, tekee konformin bijektion olemassaolosta vahvemman ominaisuuden kuin homeomorfisuudesta. Vastaavia, joskaan ei yhtä kattavia tuloksia seuraa myös *useasti yhtenäisille* alueille, kuten Luvun 3 *renkaita* eli tyypin

$$r < |z| < R, \quad R > r > 0,$$

joukkoja koskeva tarkastelu osoittaa. Käy ilmi, että näiden tapauksessa konformiominaisuudet määräytyvät suhteesta R/r.

Useat konformikuvausten olemassaololauseet eivät ole konstruktivistisia eivätkä siten suoranaisesti anna etsittyä konformia bijektiota alueelta toiselle. Poikkeuksena esimerkiksi kuvaukset yksikkökiekolta $|z| < 1$ itselleen saavat yksinkertaisen suljetun muodon

$$\varphi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Tulos on seuraus *Schwarzin lemmasta*, jonka nojalla kompleksisesti derivoituva kuvaus f, joka kuvaa yksikkökiekon $|z| < 1$ itselleen kiintopisteenään origo, toteuttaa arvion

$$\big|f(z)\big| \leq |z|, \quad |z| < 1.$$

Toinen tällainen erityistapaus sinänsä on Luvussa 3 käsiteltävä *Schwarz-Christoffelin* kaava

$$f(z) = \alpha \int_0^z \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - a_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\xi - a_n)^{\mu_n}} + \beta,$$

joka antaa konformikuvauksen f ylemmältä puolitasolta mielivaltaiselle monikulmiolle. Parametreina tässä ovat kärjiksi kuvautuvat reaaliakselin pisteet $a_1, \ldots, a_n$ sekä kärkiin muodostuvat ulkokulmat $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Vakiot $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ määräävät kuvamonikulmion koon ja paikan.

[1] *Bernhard Riemann* (1826 – 1866), saksalainen matemaatikko, joka tutki muun muassa funktioteoriaa [3, ss. 116 – 121].

1 Kompleksimuuttujan kuvaukset

1.1 Määrittelyä

Esitellään aluksi tässä tutkielmassa käytettäviä käsitteitä ja sopimuksia. Nämä oletetaan jatkossa tunnetuiksi.

Topologisista ominaisuuksista tärkeimmiksi nousevat *kompaktius* ja *yhtenäisyys*. Joukon K kompaktiudesta käytetään seuraavista ehdoista sopivinta:

1. Jos $K \subset \mathbb{C}$, niin K on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu;

2. Jos K on mielivaltaisen metrisen avaruuden osajoukko, niin K on kompakti, jos ja vain jos jokaisella (z_n) joukon K jonolla on joukossa K suppeneva osajono (z_{n_j}); ja

3. Jos K on mielivaltaisen metrisen avaruuden osajoukko, niin K on kompakti, jos ja vain jos jokaisella joukon K avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Jos siis $\mathcal{D}$ on sellainen avointen joukkojen kokoelma, että

$$K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{D}} U,$$

niin K on kompakti, jos ja vain jos on olemassa sellainen äärellinen $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, että edelleen

$$K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{D}_0} U.$$

Joukkoa $\Omega \subset \mathbb{C}$ kutsutaan taas *epäyhtenäiseksi*, jos on olemassa sellaiset epätyhjät $A, B \subset \mathbb{C}$, että $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ ja $A \cup B = \Omega$. Muutoin joukkoa Ω sanotaan *yhtenäiseksi*. *Alue* on epätyhjä, yhtenäinen ja avoin tason $\mathbb{C}$ osajoukko. Käytetään alueesta jatkossa merkintää Ω, jollei toisin mainita.

Siirrytään funktioihin liittyviin merkintöihin. Jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on rajoitettu, niin asetetaan

$$\|f\|_\Omega = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Luku $\|f\|_\Omega$ tunnetaan muun muassa funktion f *supremum-* eli *sup-normina*.

Samastus $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ laajentaa reaalisen differentioituvuuden vastaavan myös kompleksilukujen merkintöjä. Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on edelleen alue, niin funktiota $f = (u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sanotaan *differentioituvaksi* pisteessä $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, jos komponentit $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia pisteessä $\mathbf{x}_0$ ja jos on olemassa sellaiset jossakin origon ympäristössä määritelyt funktiot ε_u ja ε_v, että $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \varepsilon_u(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \varepsilon_v(\mathbf{h}) = 0$ ja että

$$u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x}_0) = \nabla u(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\varepsilon_u(\mathbf{h}),$$
$$v(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - v(\mathbf{x}_0) = \nabla v(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\varepsilon_v(\mathbf{h}),$$

missä $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ on *nabla-operaattori* ja $\cdot$ vektorien pistetulo. Täten voidaan sanoa, että alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ määritelty funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on *differentioituva* pisteessä $z_0 \in \Omega$, jos on olemassa sellainen jossakin origon ympäristössä määritelty funktio ε, että $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ja että

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \alpha h + \beta\overline{h} + |h|\varepsilon(h)$$

jollakin kompleksilukuparilla α, β. Suoralla laskulla selviää, että nämä ovat funktion f *Wirtingerin derivaatat* eli että

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Differentioituvuutta vahvempi ominaisuus on kompleksinen derivoituvuus. Tässä tutkielmassa funktiota $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sanotaan *holomorfiseksi* alueessa Ω, jos raja-arvo

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

on olemassa kaikilla $z \in \Omega$. Tällöin merkitään $f \in H(\Omega)$. Holomorfisia funktioita voidaan nimittää myös analyyttisiksi [1, 7]. Holomorfisten funktioiden perustulokset sekä niiden yhteys harmonisiin funktioihin pidetään tunnettuina yliopiston syventäviin opintoihin kuuluvan lukukauden mittaisen kurssin syvyyden osalta. Edellisten lisäksi tarvitaan seuraavia teoksen [8] tuloksia:

Lause 1.1.1. *Olkoon $z_0 \in \Omega$. Jos f on holomorfinen jossakin kiekossa $D = D(z_0, r)$, missä $r > 0$, ja jos $\left|f(z)\right| \leq M$ kaikilla $z \in D$, niin*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n},$$

missä $n = 1, 2, \ldots$. [8, s. 229]

Kompleksisen integroinnin lähtökohtana on käyrän käsite. Pidetään tunnettuna, että suljetun käyrän $C \subset \Omega$ *kiertymäluku* pisteen $z_0 \notin C$ suhteen saadaan integraalina

$$\mathrm{Ind}_C(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Kiertymäluku nimensä mukaisesti formalisoi käyrän kiertymisen.

Lause 1.1.2. *Olkoon $C \subset \Omega$ sellainen suljettu käyrä, että $\mathrm{Ind}_C(z) = 0$ kaikilla $z \notin \Omega$ ja $\mathrm{Ind}_C(z)$ on joko 0 tai 1 kaikilla $z \in \Omega \setminus C$. Oletetaan, että $f, g \in H(\Omega)$ ja että funktiolla f ei ole nollakohtaa käyrällä C. Tällöin käyrän C sisäpuolelle jäävien funktion f nollakohtien moninkerrat huomioiva nollakohtien lukumäärä N_f saadaan integraalina*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z.$$

Jos lisäksi $\big|f(z) - g(z)\big| < \big|f(z)\big|$ kaikilla $z \in C$, niin $N_f = N_g$.

Tuloksista ensimmäinen on *argumentin periaate*, joka liittää holomorfisen funktion nollakohdat sen logaritmisen derivaatan integraaliin. Jälkimmäistä kutsutaan usein *Rouchén lauseeksi*, jonka nojalla siis holomorfisen funktion käyttäytyminen alueen reunalla määrää sen käyttäytymisen kyseisen alueen sisäpisteissä. Lauseella 1.1.2 on vastineensa myös meromorfisille funktioille: olkoon nimittäin f sellainen alueen Ω meromorfinen funktio, että sillä ei ole napaa eikä nollakohtaa suljetulla käyrällä $C \subset \Omega$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N_f - P_f,$$

missä N_f on käyrän C sisäpuolelle jäävien funktion f nollakohtien ja P_f vastaavien napojen lukumäärä moninkerrat huomioonottaen. [8, s. 242]

1.2 Biholomorfiset kuvaukset

Siirrytään käsittelemään holomorfisia bijektioita. Näitä koskevia tuloksia vaaditaan luomaan viitekehystä konformikuvauksille osana kompleksianalyysin työkaluja. Tarkastelun sivutuotteena saadaan lisäksi niin kutsuttu *avoimen kuvauksen lause*, jonka mukaan holomorfinen kuvaus kuvaa alueen alueeksi tai pisteeksi ja joka siten liittyy tiiviisti konformien kuvausten geometrisiin ominaisuuksiin.

Tulokset noudattelevat Rudinin teosta [8, ss. 231 – 233].

Määritelmä 1.2.1. Olkoot $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ alueita. Kuvausta $f : \Omega \to \Omega'$ kutsutaan tällöin *biholomorfiseksi*, jos f on bijektio ja lisäksi $f \in H(\Omega)$.

Huomautus. Holomorfisesta injektiosta käytetään myös nimitystä *univalentti* [7].

Lemma 1.2.2. *Olkoon $f \in H(\Omega)$, ja määritellään funktio $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ asettamalla*

$$g(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w,$$

ja $g(z, z) = f'(z)$. Tällöin g on jatkuva.

Todistus. Funktion f holomorfisuuden nojalla riittää tarkastella vain tapausta $z = w$:

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $z_0 \in \Omega$. Koska $f \in H(\Omega)$, niin f' on erityisesti jatkuva pisteessä z_0. On siis olemassa sellainen $r > 0$, että $D(z_0, r) \subset \Omega$ ja

$$|f'(\zeta) - f'(z_0)| < \varepsilon, \quad \zeta \in D(z_0, r). \tag{1.1}$$

Olkoot nyt $z, w \in D(z_0, r)$, ja asetetaan

$$\zeta = \zeta(t) = (1-t)z + tw, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tällöin $\zeta(t) \in D(z_0, r)$ kaikilla $0 \leq t \leq 1$. Toisaalta

$$\begin{aligned} \varepsilon \overset{(1.1)}{>} \int_0^1 \big|f'(\zeta(t)) - f'(z_0)\big| \,\mathrm{d}t &\geq \left| \int_0^1 \Big(f'(\zeta(t)) - f'(z_0) \Big) \,\mathrm{d}t \right| \\ &= \big|g(z, w) - g(z_0, z_0)\big|. \end{aligned}$$

Väite seuraa. $\square$

Lause 1.2.3. *Olkoon $z_0 \in \Omega$, ja oletetaan, että $\varphi \in H(\Omega)$ ja että $\varphi'(z_0) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellainen pisteen z_0 (avoin) ympäristö $V \subset \Omega$, että*

1. *$\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ on bijektio;*
2. *$W = \varphi(V)$ on avoin; ja*
3. *jos funktio $\psi : W \to V$ toteuttaa yhtälön $\psi(\varphi(z)) = z$, niin $\psi \in H(W)$.*

Todistus. 1. Sovelletaan Lemmaa 1.2.2, jossa φ on funktion f roolissa. Oletuksen nojalla $g(z_0, z_0) \neq 0$. Näin ollen funktion g jatkuvuus antaa sellaisen pisteen z_0 ympäristön $V \subset \Omega$, että

$$g(z_1, z_2) \neq 0$$

missä $z_1, z_2 \in V$. Voidaan olettaa, että tällöin lisäksi

$$|g(z_1, z_2)| \geq \frac{1}{2} |\varphi'(z_0)|.$$

Seuraa ehto

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2} |\varphi'(z_0)| \cdot |z_1 - z_2|. \tag{1.2}$$

Jos nyt $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, arviosta (1.2) saadaan yhtäsuuruus $z_1 = z_2$, mikä todistaa bijektiivisyyden.

2. Olkoon $z_0 \in V$, ja valitaan luku $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\bar{D}(z_0, r)$ sisältyy joukkoon V. Ehto (1.2) antaa sellaisen $c > 0$, että

$$|\varphi(z_0 + re^{i\theta}) - \varphi(z_0)| > 2c, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{1.3}$$

Olkoon nyt $\lambda \in D(\varphi(z_0), c)$. Kiekon määritelmän nojalla siis

$$|\lambda - \varphi(z_0)| < c,$$

joten kohdasta (1.3) kolmioepäyhtälöä hyödyntämällä seuraa ehto

$$\min_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left|\lambda - \varphi(z_0 + re^{i\theta})\right| > c.$$

Oletetaan nyt, ettei funktiolla $\varphi - \lambda$ ole nollakohtaa. Tällöin soveltamalla maksimiperiaatetta

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{|\lambda - \varphi(z_0)|} \leq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \frac{1}{|\lambda - \varphi(z_0 + re^{i\theta})|} < \frac{1}{c},$$

mikä johtaa ristiriitaan. Näin ollen $\varphi(z) = \lambda$ jollakin $z \in V$, eli $\lambda \in D(z_0, r) \subset \varphi(V)$. Koska $\lambda \in D(\varphi(z_0), c)$ valittiin mielivaltaisesti, seuraa, että $\varphi(V)$ on avoin.

3. Olkoon $w_0 \in W$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi sellainen $z_0 \in V$, että $\psi(w_0) = z_0$. Jos nyt edelleen $w \in W$ ja vastaavasti $\psi(w) = z$, niin

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{\varphi(z) - \varphi(z_0)}. \tag{1.4}$$

Arvion (1.2) nojalla rajankäynnissä $w \to w_0$ myös $z \to z_0$. Näin ollen Yhtälöstä (1.4)

$$\psi'(w_0) = \frac{1}{\varphi'(z_0)} = \frac{1}{\varphi'(\psi(z_0))}. \tag{1.5}$$

Koska (1.5) pätee kaikilla $w_0 \in W$, saadaan $\psi \in H(W)$ ja siis väite seuraa.

□

Lause 1.2.4. *Oletetaan, että $f \in H(\Omega)$ on ei-vakio funktio, ja olkoot $z_0 \in \Omega$ ja $w_0 = f(z_0)$. Määritellään lisäksi m yhtälön $f(z) = w_0$ ratkaisun $z = z_0$ kertalukuna. Tällöin on olemassa sellainen pisteen z_0 (avoin) ympäristö $V \subset \Omega$ ja kuvaus $\varphi \in H(V)$, että*

1. $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m$ *kaikilla* $z \in \Omega$;

2. $\varphi'(z) \neq 0$ *kaikilla* $z \in V$; *ja*

3. $\varphi : V \to D(0,r)$ *on bijektio jollakin* $r > 0$.

Jos siis merkitään $p_m(z) = z^m$, niin Lauseen 1.2.4 nojalla f on muotoa

$$f - w_0 = p_m \circ \varphi. \tag{1.6}$$

Lausetta 1.2.4 kutsutaan *lokaaliksi kuvauslauseeksi* [1, s. 130].

Todistus. Voidaan olettaa yleisyyttä rajoittamatta, että Ω on sellainen pisteen z_0 konveksi ympäristö, että $f(z) \neq w_0$ kaikilla $z \neq z_0$. Nyt f on muotoa

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z), \quad w \in \Omega, \quad g \in H(\Omega),$$

missä $g(z_0) \neq 0$, ja näin ollen funktiolla $h' = g'/g \in H(\Omega)$ on antiderivaatta $h \in H(\Omega)$ [8, Theorem 10.14, s. 223].

Toisaalta seuraa, että funktion $g(z)e^{-h(z)}$ derivaatta on identtisesti 0 koko alueessa Ω ja siis se on vakio. Lisäämällä funktioon h sopiva vakiotermi saadaan siis yhtäsuuruus $g(z) = e^{h(z)}$. Vaadittava muoto (1.6) saavutetaan täten valinnalla

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp \frac{h(z)}{m}, \quad z \in \Omega. \tag{1.7}$$

Loput väitteistä seuraavat nyt Lauseen 1.2.3 nojalla. □

Seuraus 1.2.5. *Jos* $f : \Omega \to \Omega'$ *on biholomorfinen, niin* $f'(z_0) \neq 0$ *kaikilla* $z_0 \in \Omega$ *ja lisäksi* $f^{-1} \in H(\Omega')$.

Edeltävät lauseet riittävät nyt työkaluiksi todistamaan niinkutsutun *avoimen kuvauksen lauseen*, jonka nimitys pohjautuu *avoimen kuvauksen* käsitteeseen:

Määritelmä 1.2.6. Kuvausta $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kutsutaan *avoimeksi*, jos $f(U)$ on avoin kaikilla avoimilla $U \subset \Omega$.

Lause 1.2.7. *Jos* $f \in H(\Omega)$, *niin* $f(\Omega)$ *on joko piste tai alue.*

Todistus. Olkoon $f \in H(\Omega)$. Voidaan olettaa, ettei f ole vakio, sillä muutoin f kuvaa alueen Ω pisteeksi. Tällöin lokaali muoto (1.6) pätee, ja näin ollen riittää osoittaa, että funktio $p_m \circ \varphi$ kuvaa Lauseen 1.2.4 mukaisen pisteen z_0 avoimen ympäristön V edelleen avoimeksi.

Lauseen 1.2.3 nojalla $W = \varphi(V)$ on nyt avoin. Toisaalta nyt myös $p_m(W) = f(V)$ on avoin, sillä jos $0 \notin W$, niin kuvajoukko $p_m(W)$ on avoin Lauseen 1.2.3 nojalla ja sillä lisäksi p_m kuvaa kiekkoympäristön $D(0,r)$ jälleen kiekoksi $D(0,r^m)$. Väite seuraa, sillä kahden avoimen kuvauksen yhdistetty kuvaus on selvästikin edelleen avoin. □

1.3 Konformius

Annetaan seuraavaksi *kulmien muuttumattomuudelle* formaali määritelmä jälleen Rudinin teosta [8, s. 296] mukaillen.

Tarkastellaan lukua $z_0 \in \mathbb{C}$. Tälle saadaan napakoordinaattiesitys $z_0 = re^{i\theta}$, missä $r = |z_0|$ ja $\theta = \arg z_0$, missä arg on välille $]-\pi, \pi]$ rajoitettu argumentin päähaara. Tämän nojalla

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \frac{re^{i\theta}}{r} = e^{i\theta}, \tag{1.8}$$

jos $z_0 \neq 0$. Näin ollen jokaiseen kompleksitason pisteeseen $z_0 \neq 0$ liittyy Yhtälön (1.8) mukaisesti yksikköympyrän piste $e^{i\theta}$, ja tälle käytetään jatkossa merkintää

$$A[z_0] = \frac{z_0}{|z_0|}, \quad z_0 \neq 0. \tag{1.9}$$

Kohdassa (1.8) esiintyvä argumentti θ taas määrää luvun $A[z_0]$ yksikäsitteisesti, joten suuretta $A[z_0]$ voidaan oikeutetusti kutsua lukuun z_0 liittyväksi *suunnaksi*.

Olkoon nyt L_j pisteestä z_0 lähtevä puolisuora suuntakulmanaan θ_j, $j = 1, 2$. Tällaisen antaa kuvaus

$$\gamma_j(t) = z_0 + e^{i\theta_j} t, \quad t \geq 0.$$

Tutkitaan puolisuoran L_j kuvautumista funktiossa $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Oletetaan, että $f(z) \neq f(z_0)$ jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä $D'(z_0, r_0) \subset \Omega$ ja että kuvakäyrät $f(L_j)$, $j = 1, 2$, ovat säännöllisiä. Pisteiden $f(\gamma_j(t))$ ja $f(z_0)$ kautta kulkevan sekantin suunnalle saadaan esitys

$$A[f(z_0 + e^{i\theta_j} t) - f(z_0)], \quad t > 0, \tag{1.10}$$

jolloin pisteeseen $f(z_0)$ asetetun tangentin suunta saadaan luvusta (1.10) raja-arvona $t \to 0^+$. [7, s. 149]

Olkoon nyt $\theta = \theta_2 - \theta_1$ puolisuorien L_j välinen *suunnattu kulma*, jonka oikea kylki on siis L_1 ja vasen L_2. Vaaditaan, että myös kuvakäyrät $f(L_j)$, $j = 1, 2$, leikkaavat toisensa pisteessä $f(z_0)$ suunnatussa kulmassa θ Kuvan 1 mukaisesti. Näin ollen tangenttien välistä kulmaa tarkastelemalla

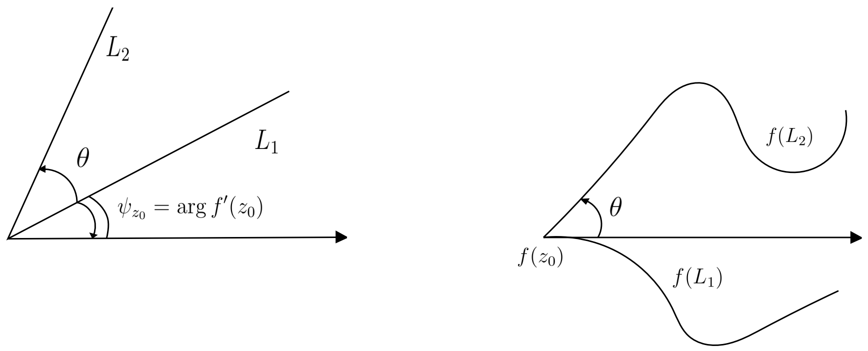
$$\frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} = e^{i\theta} = \frac{\lim_{t\to 0^+} A[f(z_0 + e^{i\theta_2} t) - f(z_0)]}{\lim_{t\to 0^+} A[f(z_0 + e^{i\theta_1} t) - f(z_0)]},$$

mistä ratkaistuna seuraa ehto

$$\lim_{t\to 0^+} \Big(A[f(z_0 + e^{i\theta_1} t) - f(z_0)] e^{-i\theta_1} \Big) = \lim_{t\to 0^+} \Big(A[f(z_0 + e^{i\theta_2} t) - f(z_0)] e^{-i\theta_2} \Big).$$

Kuva 1: Suorien L_j kuvautuminen käyriksi $f(L_j)$, $j = 1, 2$.

(a) z-taso (b) w-taso



Määritelmä 1.3.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue ja $z_0 \in \Omega$ piste. Jos nyt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on sellainen kuvaus, että $f(z) \neq f(z_0)$ jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä $D'(z_0, r_0) \subset \Omega$, niin tällöin funktion f sanotaan olevan *konformi* eli *kulmien suuruuden ja suunnan säilyttävä* pisteessä z_0, jos raja-arvo

$$\lim_{r \to 0^+} \Big(A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]e^{-i\theta} \Big) \tag{1.11}$$

on olemassa ja jos (1.11) lisäksi on riippumaton luvusta θ. Funktiota f kutsutaan *konformiksi alueessa* Ω, jos se on konformi kaikilla $z_0 \in \Omega$.

Raja-arvolle (1.11) asetetut vaatimukset takaavat muutakin kuin vain kulmien säilymisen. Koska (1.11) ei riipu kulmasta θ, niin moduleita tarkastelemalla päädytään tulokseen

$$\lim_{r \to 0^+} \Big(A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]e^{-i\theta} \Big) = \exp(i\psi_{z_0}),$$

missä ψ_{z_0} on jokin pisteestä z_0 riippuva reaaliluku. Täten

$$\lim_{r \to 0^+} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] = \exp\big(i(\psi_{z_0} + \theta)\big). \tag{1.12}$$

Tuloksesta (1.12) voidaan tulkita, että pisteen z_0 ympäristö kääntyy kuvautuessaan kulman ψ_{z_0} verran. Seuraavista lauseista selviää, miten ψ_{z_0} määräytyy pisteen z_0 ja funktion f mukaan:

Lause 1.3.2. *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kuvaus.*

1. *Jos $f'(z_0)$ on olemassa jollakin $z_0 \in \Omega$ ja $f'(z_0) \neq 0$, niin f on konformi pisteessä z_0.*

2. *Jos funktion f differentiaali on nollasta eroavana olemassa pisteessä $z_0 \in \Omega$ ja jos f on lisäksi konformi pisteessä z_0, niin $f'(z_0)$ on olemassa ja $f'(z_0) \neq 0$.*

Todistus. 1. Olkoon aluksi $\varphi \in H(\Omega)$ funktio, joka on normitettu ehdoin $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\Big(A[\varphi(0+re^{i\theta})-\varphi(0)]e^{-i\theta}\Big) &= \lim_{r\to 0^+}\Big(A[\varphi(re^{i\theta})]e^{-i\theta}\Big)\\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{\varphi(re^{i\theta})}{|\varphi(re^{i\theta})|}e^{-i\theta} = \frac{\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|} = 1.\end{aligned}$$

Näin ollen φ on konformi origossa. Olkoon nyt f oletusten mukainen funktio, ja asetetaan

$$\varphi(z) = \frac{f(z+z_0)-f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Siis

$$f(z) = f'(z_0)\varphi(z-z_0) + f(z_0),$$

ja φ toteuttaa ehdot $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Täten todistuksen alun nojalla seuraa, että

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\Big(A[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)]e^{-i\theta}\Big) &= \lim_{r\to 0^+}\Big(A[f'(z_0)\varphi(re^{i\theta})]e^{-i\theta}\Big)\\ &= A[f'(z_0)]\lim_{r\to 0^+}\Big(A[\varphi(re^{i\theta})]e^{-i\theta}\Big)\\ &= A[f'(z_0)].\end{aligned}$$

Väite seuraa.

2. Funktion f differentiaalin olemassaolo antaa sellaisen lukuparin $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, että

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \alpha h + \beta\overline{h} + |h|\varepsilon(h),$$

missä funktio ε on määritelty jossakin pisteen z_0 ympäristössä ja lisäksi $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Nyt

$$\lim_{r\to 0^+}\Big(A[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)]e^{-i\theta}\Big) = A[\alpha+\beta e^{-2i\theta}].$$

Ne argumentin θ arvot, joilla $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$ saa arvon 0, voidaan jättää huomiotta; näitä on enintään kaksi välillä $[0,2\pi[$. Oletuksen nojalla vasemman puolen raja-arvo ei riipu luvusta θ. Näin ollen suunta

$$A[\alpha+\beta e^{-2i\theta}]$$

on muilla argumentin θ arvoilla vakio, mikä on mahdollista vain, jos $\beta = 0$. Siis $f'(z_0) = \alpha \neq 0$, mikä todistaa väitteen.

□

Huomautus. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ voi pitää kulmat muuttumattomina, vaikka sen differentiaali häviäisikin. Näin käy esimerkiksi funktion $f(z) = z|z|$ ja pisteen $z_0 = 0$ tapauksessa. Koska

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2} + iy\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

seuraa nimittäin, että $\alpha = \beta = 0$, mutta toisaalta

$$\lim_{r \to 0^+} \Big(A[f(0 + re^{i\theta}) - f(0)]e^{-i\theta} \Big) = \lim_{r \to 0^+} \frac{r^2 e^{i\theta}}{|r^2 e^{i\theta}|} e^{-i\theta} = 1,$$

joten f todella on konformi origossa.

Nehari osoittaa teoksessaan [7, s. 150] lisäksi, ettei holomorfinen funktio voi pitää kulmia muuttumattomina derivaattansa nollakohdassa:

Lause 1.3.3. *Olkoot $z_0 \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$, ja oletetaan, että*

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \tag{1.13}$$

mutta $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Tällöin f m-kertaistaa pisteen z_0 kautta kulkevan suoran L suuntakulman θ, eli toisin sanoen kuvakäyrän $f(L)$ pisteeseen $f(z_0)$ piirretyn tangentin suuntakulma on $m\theta$ (mod 2π).

Todistus. Määritelmään 1.3.1 johtavan päättelyn nojalla riittää osoittaa, että raja-arvo (1.10) riippuu luvusta $m\theta$. Oletuksesta (1.13) seuraa, että $z = z_0$ on yhtälön $f(z) = f(z_0)$ m-kertainen juuri. Lokaali kuvauslause 1.2.4 puolestaan antaa sellaisen konformin $\varphi \in H(\Omega)$, että ehto (1.6) toteutuu eli että

$$f - w_0 = p_m \circ \varphi, \quad \varphi'(z_0) \neq 0,$$

missä $w_0 = f(z_0)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} A\big[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)\big] &= \lim_{r \to 0^+} A\big[\varphi(re^{i\theta})^m\big] = \Big(e^{i\theta} A[\varphi'(z_0)]\Big)^m \\ &= e^{i\theta m} \cdot A\big[\varphi'(z_0)^m\big]. \end{aligned}$$

Tangentin suuntaan vaikuttaa siis tekijä $e^{i\theta m}$, jonka mukaan alkuperäisen puolisuoran argumentti θ muuttuu kuvauksessa f argumentiksi $m\theta$. Väite seuraa. □

Vastaavat tulokset pätevät myös suljetuille käyrille. Käytetään Lauseen 1.3.3 todistuksen merkintöjä, ja oletetaan nyt, että alue Ω on lokaalin kuvauslauseen 1.2.4 todistuksen mukaisesti pisteen z_0 konveksi ympäristö, jossa

$f(z) \neq w_0$ kaikilla $z \neq z_0$. Alueen Ω suljetun käyrän C kiertymäluku pisteen $z_0 \notin C$ suhteen saadaan todetusti integraalina

$$\operatorname{Ind}_C(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Hyödynnetään jälleen lokaalin kuvauslauseen 1.2.4 funktiota φ. Tämän logaritminen derivaatta on muotoa

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{m}, \quad z \in \Omega.$$

Täten kuvakäyrän $C' = f(C)$ kiertymäluvulle on voimassa

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_{C'}(w_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}w}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \mathrm{d}z = \frac{m}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{m}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_C h'(z) \mathrm{d}z = \frac{m}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \\
&= m \cdot \operatorname{Ind}_C(z_0),
\end{aligned}$$

sillä funktiolla h' on Lauseen 1.2.4 todistuksen yhteydessä todetusti antiderivaatta konveksissa alueessa Ω.

Näin ollen kuvakäyrä $f(C)$ kiertyy pisteen w_0 ympäri m kertaa, kun C tekee vastaavasti pisteelle z_0 kerran. Toisin sanoen holomorfisen funktion konformi käyttäytyminen muistuttaa lokaalisti potenssifunktioita p_m ja täten johtaa käänteisfunktion juurifunktiota muistuttavaan haararakenteeseen. Tätä tarkastellaan tarkemmin teoksissa [1, 5].

On kuitenkin huomattavaa, että konformius asettaa rajoituksia ainoastaan yhtälön $f(z) = w_0$ juurten kertaluvulle eikä itsessään niiden lukumäärälle. Tutkitaan esimerkkinä potenssifunktiota $p_2(z) = z^2$. Lauseen 1.3.3 nojalla p_2 on origon ulkopuolella konformi. Toisaalta yhtälöllä $z^2 = 1$ on kaksi ratkaisua, $z = 1$ ja $z = -1$, joista kumpikin on yksinkertainen ja toisaalta joissa kummassakin p_2 on konformi.

Yhteenvetona edeltävistä lauseista voidaan todeta, että konformius on ominaista holomorfisille funktioille, joiden määrittelyalueessa ei ole derivaatan nollakohtia. Täten on oikeutettua rajoittaa jatkon tarkastelu koskemaan vain näitä. [7, s. 150 – 152] [8, s. 278 – 279]

Kootaan seuraavaan lauseeseen konformiuden eri tulkintoja:

Lause 1.3.4. *Olkoon $f \in H(\Omega)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

1. $f'(z_0) \neq 0$;

2. *f on konformi; ja*

3. funktion f Jacobin determinantti on positiivinen.

Todistus. Implikaatio 1 $\Rightarrow$ 2 seuraa Lauseesta 1.3.2 ja vastaavasti 2 $\Rightarrow$ 1 Lemmasta 1.3.3. Nyt 1 $\Leftrightarrow$ 3, sillä holomorfisuuden nojalla Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa ja täten Jacobin determinantille

$$\big|J(f)\big| = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

pätee $|J(f)(z_0)| = |f'(z_0)|^2$ kaikilla $z_0 \in \Omega$, mistä kumpikin väite seuraa. $\square$

Holomorfisten ja etenkin konformien kuvausten geometriset ominaisuudet määräytyvät sen derivaatasta. Jos nimittäin $f \in H(\Omega)$ on konformi alueen Ω pisteessä z_0, niin tällöin saadaan yhteys $\psi_{z_0} = \arg f'(z_0)$, missä ψ_{z_0} on kuin kohdassa (1.12). Täten kuvauksen f voi mieltää kiertävän pisteen z_0 ympäristöä kulman $\arg f'(z_0)$ verran.

Jos toisaalta γ on säännöllinen käyrä alueessa, niin kuvakäyrä $\zeta = f \circ \gamma$ on edelleen säännöllinen, sillä

$$\zeta'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0).$$

Näin ollen $|\zeta'(t_0)| = |f'(z_0)| \cdot |\gamma'(t_0)|$, eli funktio f venyttää pisteen z_0 ympäristöä tekijällä $|f'(z_0)|$. Toisin sanoen kuvaus f käyttäytyy kierron lisäksi kuin homotetia, jonka mittakaava on $|f'(z_0)|$. [**?**, s. 259]

Esitellään vielä havainnollistava tulos [7, Exercise 10, s. 155]:

Lause 1.3.5. *Olkoon $f \in H(\Omega)$ konformi. Jos f kuvaa z_0-keskisen r-säteisen ympyrän C_r konformisti käyräksi C, niin käyrien pituuksien suhteelle saadaan alaraja*

$$\frac{\mathscr{L}(C)}{\mathscr{L}(C_r)} \geq \big|f'(z_0)\big|. \tag{1.14}$$

Todistus. Kuvaus $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ on annetun ympyrän parametrisaatio. Käyttämällä kuvausta $w = f(z)$ seuraa, että käyrien pituudet saadaan integraaleina

$$\mathscr{L}(C_r) = \int_{C_r} |\,\mathrm{d}z|, \quad \mathscr{L}(C) = \int_C |\,\mathrm{d}w| = \int_{C_r} \big|f'(z)\big||\,\mathrm{d}z|, \tag{1.15}$$

mistä seuraa tunnetusti, että $\mathscr{L}(C_r) = 2\pi r$. Nyt Cauchyn integraalikaavan avulla

$$\begin{aligned} \big|f'(z_0)\big| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f'(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r} \frac{|f'(z)|}{|z - z_0|}|\,\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} \big|f'(z)\big||\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{1}{\mathscr{L}(C_r)}\int_C |\,\mathrm{d}w| = \frac{\mathscr{L}(C)}{\mathscr{L}(C_r)}, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. $\square$

Vastaava väite on voimassa myös pinta-alalle:

Lause 1.3.6. *Olkoon Ω alue, jonka pinta-ala on integraalina*

$$A(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

olemassa. Jos nyt $f \in H(\Omega)$ on injektiivinen konformikuvaus, jolle $f(\Omega) = \Omega'$, seuraa, että

$$A(\Omega') = \iint_{\Omega'} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_\Omega \left|f'(x+iy)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.16}$$

Todistus. Seuraa Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla suoralla muuttujanvaihdolla [1, ss. 75 – 76]. □

Geometristen ominaisuuksien ohella konformikuvauksilla on myös roolinsa harmonisten funktioiden teoriassa ja niiden sovelluksissa etenkin fysiikassa:

Lause 1.3.7. *Harmonisen ja konformin funktion yhdistetty kuvaus on edelleen harmoninen.*

Todistus. Olkoot Ω, $\Omega' \subset \mathbb{C}$ alueita, $f = u + iv : \Omega \to \Omega'$ konformi ja $U : \Omega' \to \mathbb{R}$ harmoninen. Riittää osoittaa, että tällöin myös yhdistetty kuvaus $V = U \circ f$ on harmoninen. Ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tällöin siis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\
&\qquad + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Nyt soveltamalla funktion U harmonisuudesta seuraavaa yhtäsuuruutta

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial u}$$

saadaan sievennetty muoto

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vastaavasti

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Soveltamalla nyt Cauchy-Riemannin yhtälöitä sekä funktion U harmonisuutta saadaan

$$\nabla^2 V = \frac{\partial U}{\partial u}\nabla^2 u + \frac{\partial U}{\partial v}\nabla^2 v.$$

Toisaalta siis $\nabla^2 V = 0$, sillä Cauchy-Riemannin yhtälöistä seuraten komponentit u ja v ovat harmonisia. Väite seuraa. [2, s. 3] $\square$

Huomautus. Yhdistetylle funktiolle $V = U \circ f$ pätee nyt erityisesti

$$\nabla^2 V(f(z)) = |f'(z)|^2 \cdot \nabla^2 U(z) = \left|J(f)(z)\right| \cdot \nabla^2 U(z), \quad z \in \Omega, \tag{1.17}$$

Kaava (1.17) havainnollistaa lisäksi Jacobin determinantin roolia koordinaatistomuunnoksissa.

1.4 Esimerkkejä

Siirrytään nyt tarkastelemaan kolmen esimerkkikuvauksen konformiutta ja lisäksi näiden kuvausominaisuuksia käyräparvien avulla.

1.4.1 Potenssifunktio p_2

Tutkitaan aluksi analyyttista funktiota $p_2(z) = z^2$, joka on todetusti konformi origon ulkopuolella. Aloitetaan tarkastelu kysymällä, millaiseksi käyräksi p_2 kuvaa imaginaariakselin suuntaisen suoran

$$l_\xi = \{\, z \in \mathbb{C} : \Re(z) = \xi \,\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Tällaisella on parametrisaatio $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma_\xi(t) = \xi + it$. Kuvakäyrän $p_2(l_\xi)$ parametrisaatio saadaan siis yhdistettynä kuvauksena $\zeta_\xi = p_2 \circ \gamma_\xi$, jolle

$$\zeta_\xi(t) = (p_2 \circ \gamma_\xi)(t) = \gamma_\xi(t)^2 = (\xi + it)^2 = \xi^2 - t^2 + 2\xi it$$

Jos $\xi = 0$, niin $\zeta_\xi(t) = -t^2$, eli p_2 kuvaa imaginaariakselin reaaliakselin ei-positiiviseksi puoleksi $\Re(z) \leq 0$. Tapauksessa $\xi > 0$ käyrä $p_2(l_\xi)$ voidaan uudelleenparametrisoida asettamalla

$$\eta_\xi(t) = \zeta_\xi\left(\frac{t}{2\xi}\right) = \xi^2 - \frac{1}{4\xi^2}t^2 + it, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

joka on selvästi parametrisaatio vasemmalleaukeavalle paraabelille, jonka symmetria-akseli on reaaliakseli. Toisaalta muodon (1.18) nojalla $\eta_{-\xi} = \eta_\xi$, joten vastaava tulos pätee myös tapauksessa $\xi < 0$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että reaaliakselin suuntaisista suorista

$$l'_\xi = \{\, z \in \mathbb{C} : \Im(z) = \xi \,\}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

tapaus $\xi = 0$ kuvautuu reaaliakselin ei-negatiiviseksi puoleksi $\Re(z) \geq 0$ ja muut taas xy-tason paraabeleiksi

$$x = \frac{1}{4\xi^2}y^2 - \xi^2.$$

Funktion p_2 konformiuden nojalla paraabelit $p_2(l_a)$ ja $p_2(l'_b)$, $a, b \neq 0$, leikkaavat toisensa kohtisuorasti suorien l_a ja l'_b kohtisuoruudesta seuraten. Toisaalta reaali- ja imaginaariakselin välinen suora kulma kuvautuu reaaliakselin puoliskojen väliseksi oikokulmaksi. Tarkasteltava funktio ei siis ole konformi derivaattansa nollakohdassa, kuten Lause 1.3.3 tosin jo osoittaakin.

1.4.2 Eksponenttifunktio

Olkoon nyt $f(z) = e^z$ eksponenttifunktio. Tällöin tunnetusti $f' = f$, eli erityisesti $f \in H(\mathbb{C})$ ja siis f on kokonainen. Toisaalta luvulle $z = x + iy$

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \neq 0,$$

joten f on myös konformi koko tasossa $\mathbb{C}$.

Tarkastellaan aluksi horisontaalisia suikaleita

$$H_{[a,b]} = \{\, z \in \mathbb{C} : a \leq \Im(z) \leq b \,\}$$

käyttämällä jälleen suoria l'_ξ, $a \leq \xi \leq b$, parametrisaationaan

$$\gamma_\xi(t) = t + i\xi, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Tällöin kuvakäyrällä $f(l'_\xi)$ on yhtälön

$$\zeta_\xi(t) = e^t(\cos \xi + i \sin \xi) \tag{1.20}$$

määrittelemä parametrisaatio $\zeta_\xi = f \circ \gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Uudelleenparametrisoidaan asettamalla

$$\eta_\xi(t) = \zeta_\xi\big(\ln t\big) = t(\cos\xi + i\sin\xi), \quad t > 0,$$

jolloin siis $f(l'_\xi)$ on origosta lähtevä puolisuora, johon origo ei itse kuitenkaan kuulu. Toisaalta

$$H_{[a,b]} = \bigcup_{a\le\xi\le b} l'_\xi,$$

joten kuvan ja yhdisteen kommutoinnista seuraten

$$\begin{aligned} f\big(H_{[a,b]}\big) &= f\left(\bigcup_{a\le\xi\le b} l'_\xi\right) = \bigcup_{a\le\xi\le b} f(l'_\xi) \\ &= \{\, z\in\mathbb{C} : a \le \arg(z) \le b \,\}. \end{aligned}$$

Tässä merkinnällä arg tarkoitetaan moniarvoista kuvausta eikä niinkään argumentin välille $]-\pi,\pi]$ rajoitettua päähaaraa. Esimerkiksi suikale $H_{[0,2\pi n]}$, missä $n\in\mathbb{N}$, kuvautuu n-kertaiseksi joukoksi $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vastaavat tulokset pätevät selvästi myös avoimille väleille $]a,b[$: suikale

$$H_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$$

kuvautuu nimittäin konformisti oikeaksi puolitasoksi

$$\{\, z\in\mathbb{C} : \Re(z) > 0 \,\}.$$

Vertikaalisen suikaleen

$$V_{[a,b]} = \{\, z\in\mathbb{C} : a \le \Re(z) \le b \,\}$$

käsittely sekin palautuu suoriin l_ξ, $a\le\xi\le b$, ja siis kohtien (1.19) ja (1.20) mukaisiin parametrisaatioihin. Näiden nojalla suora l_ξ kuvautuu e^ξ-säteiseksi origokeskiseksi ympyräksi ja täten $V_{[a,b]}$ joukoksi $a \le |z| \le b$. Toistaalta $2\pi i$-jaksollisuutensa nojalla seuraa, että joukoksi $a\le|z|\le b$ kuvautuu itse asiassa surjektiivisesti muttei injektiivisesti mikä tahansa suorakulmio

$$a \le \Re(z) \le b, \quad 2\pi n \le \Im(z) \le 2\pi(n+1), \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

1.4.3 Joukowskin kuvaus

Tutkitaan yhtälön

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R > 0,$$

määrittelemää funktiota f. Muun muassa aerodynamiikassa tätä kutsutaan *Joukowskin*[2] *kuvaukseksi.*

Funktion f derivaataksi saadaan nyt

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right),$$

joten f on konformi koko tasossa lukuunottamatta reaaliakselin pisteitä R ja $-R$. Täten f on erityisesti konformi origokeskisen R-säteisen ympyrän sisä- ja ulkopuolella. Toisaalta derivoimalla toistamiseen selviää, että f kaksinkertaistaa kulmat pisteissä R ja $-R$ Lauseen 1.3.3 nojalla.

Olkoon nyt $z = re^{i\theta}$, ja asetetaan

$$\psi = \log r - \log R.$$

Tällöin siis $z = Re^{\psi + i\theta}$. Edelleen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(Re^{\psi+i\theta} + Re^{-\psi-i\theta}\right) \\ &= R\cosh(\psi + i\theta). \end{aligned}$$

Käyttämällä tähän hyperbolisen kosinin summakaavaa

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

sekä hyperbolisten ja trigonometristen funktioiden välillä vallitsevia yhteyksiä

$$\cosh t = \cos it, \quad i \sinh t = \sin it, \quad t \in \mathbb{C},$$

Joukowskin kuvaukselle saadaan muoto

$$f(z) = R\cosh\psi\cos\theta + Ri\sinh\psi\sin\theta.$$

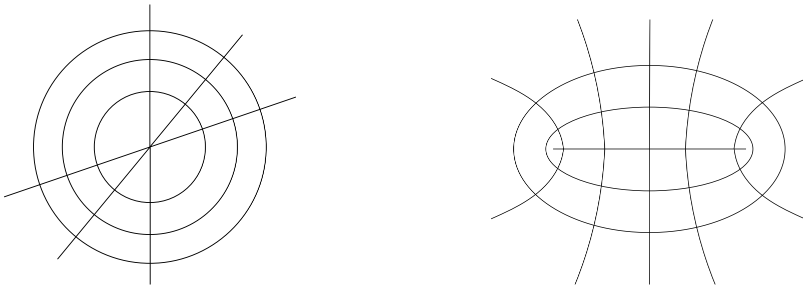
Kuvauksen f komponentit ovat siis

$$u = R\cosh\psi\cos\theta, \quad v = R\sinh\psi\sin\theta. \tag{1.22}$$

Oletetaan nyt, että $r = R$ eli toisin sanoen että $\psi = 0$. Muotojen (1.22) nojalla siis $v = 0$ identtisesti ja $u = R\cos\theta$. Täten f kuvaa origokeskisen R-säteisen ympyrän reaaliakselin väliksi $[-R, R]$. Toisaalta voidaan ratkaista

$$\cosh\psi = \frac{u}{R\cos\theta}, \quad \sinh\psi = \frac{v}{R\sin\theta}.$$

[2] *Nikolai Žukovski* (1847 – 1921), venäläinen tiedemies ja yleisnero, joka loi pohjaa muun muassa nykyisille hydro- ja aerodynamiikan teorioille. Nimen romanisaatioita ovat muun muassa Zhukowski ja Joukowski. [9]



(a) z-taso (b) w-taso

Kuva 2: Ympyrä- ja suoraparvi Joukowskin kuvauksessa.

Käyttämällä nyt identiteettejä

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1,$$

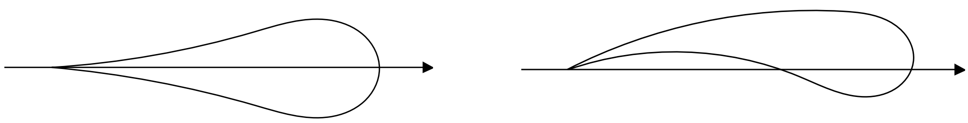
saadaan yhtälö hyperbelille

$$\left(\frac{u}{R\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{v}{R\sin\theta}\right)^2 = 1 \tag{1.23}$$

ja ellipsille

$$\left(\frac{u}{R\cosh\psi}\right)^2 + \left(\frac{v}{R\sinh\psi}\right)^2 = 1. \tag{1.24}$$

Yhtäsuuruuksien (1.22) nojalla imaginaariakseli kuvautuu itselleen, positiivinen reaaliakseli väliksi $[R,\infty[$ ja negatiivinen taas väliksi $]-\infty,-R]$. Loput origon kautta kulkevista suorista kuvautuvat puolestaan hyperbeleille (1.23), kuten Kuvassa 2.



(a) Symmetrinen. (b) Epäsymmetrinen.

Kuva 3: Joukowskin profiileja.

Vastaavasti origokeskisistä ympyröistä R-säteinen kuvautuu aiemmintodetuksi väliksi $[-R,R]$ ja muut taas ellipseiksi (1.24), jotka ovat esimerkkejä *Joukowskin profiileina* tunnetuista käyristä. Yleisesti tällainen saadaan ympyrän kuvana Joukowskin kuvauksessa, ja varsinkin jos kuvattava ympyrä kulkee kriittisen pisteen $z=-R$ kautta ja jos se sisältää näistä toisen $z=R$, profiili muistuttaa ulkomuodoltaan lentokoneen siiven poikkileikkausta.

Toisaalta tällöin z-tason ympyrän ulkopuoli kuvautuu konformisti saadun Joukowskin profiilin ulkopuoleksi, mikä mahdollistaa siiven fysikaalisten ominaisuuksien tarkastelun alkuperäisen ympyrän tai muun sopivan alueen kautta, kuten myöhemmin todetaan. Suoralla laskulla selviää lisäksi, että funktiolle f pätee

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}, \quad z \neq \pm R.$$

Näin ollen Joukowskin profiilin symmetrisyys reaaliakselin suhteen riippuu selvästi vain kuvattavan ympyrän vastaavasta symmetriasta. Kuvassa 3 esitellään tapauksista molemmat. [7, ss. 270 – 271]

2 Möbius-muunnokset

Möbius-muunnokset muodostavat tärkeän konformikuvausten alaluokan. Tasolla $\mathbb{C}$ näiden rooli on muun muassa koordinaattimuunnoksina, mutta toisaalta niihin liittyy myös geometrian ja lineaarialgebran elementtejä.

2.1 Laajennetun kompleksitason rationaalifunktiot

Ennen itse Möbius-muunnosten käsittelyä tarkastellaan kompleksitason *laajennettua kompleksitasoa*, joka osoittautuu kyseisten muunnosten luonnolliseksi määrittelyalueeksi monestakin syystä. Otetaan käyttöön uusia käsitteitä mukaillen Rudinin teosta [8]. Vastaavia nimityksiä käyttää tosin myös Lehto [5].

Kutsutaan ensinnäkin *Riemannin palloksi* avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpalloa S^2, jonka pistettä $N = (0, 0, 1)$ sanotaan *pohjoisnavaksi*. Jos nyt $z \in \mathbb{C}$, niin pisteitä N ja z yhdistävä suora leikkaa pallon S^2 triviaalin pisteen N lisäksi tasan yhdessä muussa pisteessä P. *Stereografiseksi projektioksi* määritellään kuvaus T, jolle $T(z) = P$. Stereografinen projektio T on lausuttavissa suljetussa muodossa:

Lause 2.1.1. *Pisteen $re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ stereografinen projektio on*

$$T(re^{i\theta}) = \left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1}, \frac{2r\sin\theta}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right) \tag{2.1}$$

Todistus. Pisteitä $z = re^{i\theta}$ ja N yhdistävällä suoralla l on parametrisaatio $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (1-t)\overrightarrow{Oz} + t\overrightarrow{ON} = \big((1-t)x, (1-t)y, t\big).$$

Suoran l piste $\gamma(t)$ on nyt pallolla S^2, jos ja vain jos $|\gamma(t)| = 1$. Saadaan toisen asteen yhtälö

$$\big(|z|^2+1\big)t^2 - 2|z|^2 t + |z|^2 = 1$$

ja tästä ratkaisut

$$t = \frac{2|z|^2 \pm \sqrt{4|z|^4 - 4\big(|z|^2+1\big)\big(|z|^2-1\big)}}{2\big(|z|^2+1\big)} = \frac{|z|^2 \pm 1}{|z|^2+1}$$

eli napakoordinaattimuotoisena

$$t = \frac{r^2 \pm 1}{r^2+1}.$$

Näistä $+$-vaihtoehto nohjoisnavan N antavana voidaan sivuuttaa. Projektiopisteeksi saadaan siis

$$
\begin{aligned}
T(re^{i\theta}) &= \gamma\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right) \\
&= \left(\left(1-\frac{r^2-1}{r^2+1}\right) r\cos\theta, \left(1-\frac{r^2-1}{r^2+1}\right) r\sin\theta, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1}, \frac{2r\sin\theta}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right),
\end{aligned}
$$

mistä väite seuraa. □

Kuvaus T ei kuitenkaan liitä yhtään tason $\mathbb{C}$ pistettä navalle N. Tällöin nimittäin joko $r = 0$ tai sekä $\cos\theta = 0$ että $\sin\theta = 0$; näistä jälkimmäinen johtaa ristiriitaan ja ensimmäinen taas kuvapisteeseen $P = (0, 0, -1)$. Vastaavin tarkasteluin voidaan kuitenkin todeta, että T on injektio. Jos nyt määritellään *äärettömyyspiste* ∞ asettamalla

$$T(\infty) = N$$

ja jos merkitään $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, seuraa bijektio $T : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$. Kutsutaan nyt joukkoa $\widehat{\mathbb{C}}$ *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Lisäksi seuraa, että T on rationaalisin komponentein jatkuva, ja niin on sen käänteisprojektiokin. Näin ollen $\widehat{\mathbb{C}}$ ja S^2 ovat homeomorfiset.

Laajennetulle tasolle $\widehat{\mathbb{C}}$ saadaan nyt topologia liittämällä tason $\mathbb{C}$ topologian kantaan joukot

$$D(\infty, r) = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| > r \,\} \cup \{\infty\},$$

jotka ovat miellettävissä pisteen ∞ kuulaympäristöiksi. Nyt on osoitettavissa, että T on homeomorfismi, jolloin laajennettu taso $\widehat{\mathbb{C}}$ perii topologiset ominaisuutensa, kuten kompaktiutensa, Riemannin pallolta S^2.

Olkoon nyt f on holomorfinen punkteeratussa ympäristössä $D'(\infty, r)$, $r > 0$, jossa siis

$$r < |z| < \infty.$$

Tällöin sanotaan, että funktiolla *eristetty singulariteetti* pisteessä ∞. Määritellään jatkoa varten apufunktio $\widetilde{f}$ asettamalla

$$\widetilde{f}(z) = f(1/z), \quad z \in D'(0, 1/r). \tag{2.2}$$

Tällöin funktion f singulariteetin laatu pisteessä ∞ määritellään samaksi kuin funktion $\widetilde{f}$ vastaavan pisteessä 0. Näin ollen funktion $\widetilde{f}$ napa origossa johtaa joukossa $D(\infty, r)$ meromorfiseen funktioon f. Jos nyt edelleen raja-arvo

$$\lim_{z \to 0} \widetilde{f}(z)$$

on kompleksisena olemassa, asetetaan

$$f(\infty) = \lim_{z \to 0} \widetilde{f}(z)$$

ja kutsutaan funktiota f *holomorfiseksi* joukossa $D(\infty, r)$. Onkin huomattavaa, että tässä holomorfisuudella ei tarkoiteta tarkoiteta funktion f derivoituvuutta pisteessä ∞ vaan funktion $\widetilde{f}$ käyttäytymistä pisteen 0 ympäristössä. [8, ss. 286 – 287]

Tulos [8, Theorem 10.20, s. 226] antaa riittävän ja toisaalta myös välttämättömän ehdon yllämainitulle käyttäytymiselle:

Lemma 2.1.2. *Olkoon $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ rajoitettu jossakin punkteeratussa ympäristössä $D'(z_0, r)$, $r > 0$. Tällöin funktiolla f on poistuva singulariteetti pisteessä z_0 eli voidaan määritellä sellainen arvo $f(z_0)$, että $f \in H(\Omega)$.*

Todistus. Rajoittuneisuuden nojalla on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(z)| \leq M$ joukossa $D'(z_0, r)$. Määritellään apufunktio h asettamalla

$$h(z) = (z - z_0)^2 f(z), \quad z \in D'(z_0, r),$$

ja $h(z_0) = 0$. Tällöin

$$\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} - 0 \right| = \big|(z - z_0) f(z)\big| \leq M|z - z_0| \to 0,$$

kun $z \to z_0$, joten $h'(z_0) = 0$. Toisaalta h on selvästi derivoituva myös muissa alueen Ω pisteissä, joten $h \in H(\Omega)$ ja siis saadaan sarjaesitys

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r).$$

Näin ollen voidaan asettaa $f(z_0) = a_2$, jolloin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r).$$

Täten siis $f \in H(\Omega)$, mistä väite seuraa. □

Näin ollen funktion f holomorfisuus pisteessä ∞ redusoituu funktion $\widetilde{f}$ rajoittuneisuuteen pisteen 0 ympäristössä.

Esitellään maksimiperiaatetta laajennetulla tasolla vastaava tulos [5]:

Lause 2.1.3. *Olkoon $f \in H(\Omega)$, ja olkoon $\partial\Omega$ alueen Ω reuna laajennetun tason suhteen. Jos*

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Omega}} |f(z)| \le M, \tag{2.3}$$

jokaisessa reunan pisteessä $\zeta \in \partial\Omega$, niin $|f(z)| \le M$ koko alueessa Ω.

Todistus. Antiteesin mukaan $|f(z)| > M$ jollakin $z \in \Omega$. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet $z_n \in \Omega$, että

$$\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| > M.$$

Epäyhtälön (2.3) nojalla jonolla (z_n) ei voi olla kasautumisarvoa reunalla $\partial\Omega$. Koska $\Omega \cup \partial\Omega$ on suljettuna joukkona kompakti, $|f|$ saavuttaa suurimman arvonsa ja siis supremuminsa jossakin pisteessä $z_0 \in \Omega$. Nyt maksimiperiaatteesta seuraa, että f on vakio, ja siis syntyy ristiriita oletuksen (2.3) kanssa. $\square$

Lausetta (2.1.3) sovellettaessa on todella olennaista ottaa huomioon alueen Ω reuna *laajennetun tason* $\widehat{\mathbb{C}}$ *suhteen.* Olkoon nimittäin $f(z) = e^z$. Jos nyt Ω on oikeanpuoleinen puolitaso, niin reuna $\partial\Omega$ tason $\mathbb{C}$ suhteen on siis imaginaariakseli. Toisaalta triviaalisti $|f(it)| = 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten

$$\limsup_{z\to it} |f(z)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kuitenkin pätee $|f(2)| > 1$.

Laajennetun tason maksimiperiaatteella on vahva seuraus:

Seuraus 2.1.4. *Jos $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ on holomorfinen, niin f on vakio.*

Todistus. Oletuksen nojalla $f \in H(\mathbb{C})$. Lisäksi f on rajoitettu jossakin pisteen ∞ ympäristössä. Näin ollen

$$\limsup_{z\to\infty} |f(z)| < \infty.$$

Nyt Lemman 2.1.3 perusteella f on rajoitettu myös joukossa $\mathbb{C}$, sillä tämän reuna laajennetun tason suhteen on yksiö $\{\infty\}$. Seurauksena Liouvillen lauseesta f on siis vakio. $\square$

Seurauksen 2.1.4 varjossa siirrytään tutkimaan laajennetun tason meromorfisia funktioita. Aloitetaan tarkastelemalla rationaalifunktiota R, joka on tunnetusti muotoa

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

missä P ja Q ovat kompleksilukukertoimisia polynomeja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Käytetään polynomin P (vast. Q) asteesta merkintää $\deg(P) = n$ (vast. $\deg(Q) = m$). Toisin sanoen R on siis muotoa

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}, \quad a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}, \quad a_n b_m \neq 0.$$

Algebran peruslauseen nojalla polynomilla on astelukunsa verran kompleksisia nollakohtia, jotka voivat olla moninkertaisia. Näin ollen saadaan tekijöihinjaot

$$R(z) = \frac{a_n (z - \alpha_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_j)^{\mu_j}}{b_m (z - \beta_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z - \beta_k)^{\nu_k}},$$

missä $j \leq n$ ja $k \leq m$. Näin ollen R on meromorfinen laajennetun tason funktio, ja sen äärelliset nollakohdat (vast. navat) ovat polynomin P (vast. Q) nollakohdat ja vain ne. Kummassakin tapauksessa moninkerta saadaan vastaavan nollakohdan kertalukuna.

Rationaalifunktio käyttäytyy samoin myös äärettömyyspisteessä. Nimittäin yhteisillä tekijöillä

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} = \frac{z^n \big(a_0/z^n + a_1/z^{n-1} + \ldots + a_n\big)}{z^m \big(b_0/z^m + b_1/z^{m-1} + \ldots + b_m\big)} \\ &= \frac{a_0/z^n + a_1/z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0/z^m + b_1/z^{m-1} + \ldots + b_m} z^{n-m}, \end{aligned}$$

jolloin apufunktio on muotoa

$$\widetilde{R}(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{n-m} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}. \tag{2.4}$$

Täten luvun $n - m$ merkki määrää singulariteetin laadun. Jos $n = m$, singulariteetti on poistuva, ja voidaan määritellä $R(\infty) = a_n/b_m$. Toisaalta $n > m$ johtaa $(n - m)$-kertaiseen napaan ja $n < m$ taas $(m - n)$-kertaiseen nollakohtaan.

Lemma 2.1.5. *Jos rationaalifunktio R saadaan n-asteisen polynomin P ja m-asteisen polynomin Q osamääränä ja jos polynomeilla P ja Q ei ole yhteisiä tekijöitä, niin rationaalifunktiolla R on yhtä monta nollakohtaa ja napaa laajennetulla tasolla $\widehat{\mathbb{C}}$. Kyseinen lukumäärä on luku*

$$p = \max\{n, m\}.$$

Todistus. Edeltävän tarkastelun nojalla äärellisiä nollakohtia on n ja äärellisiä napoja vastaavasti m. Väite seuraa nyt esityksen (2.4) nojalla. $\square$

Määritelmä 2.1.6. Rationaalifunktion $R = P/Q$ *aste* on luku

$$\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$

Esimerkki 2.1.7. Jokainen polynomi on triviaalisti myös rationaalifunktio. Näin ollen seuraa, että asteen n polynomilla P on n napaa. Toisaalta P on kokonainen, joten ainoa napa on äärettömyyspiste, joka on siis välttämättä n-kertainen.

Lause 2.1.8. *Jos rationaalifunktio R on astetta p, niin R saa jokaisen laajennetun tason arvon p kertaa.*

Todistus. Merkitään jälleen $R = P/Q$. Yllä on osoitettu, että funktiolla R on p napaa eli toisin sanoen se saa arvon ∞ tasan p kertaa. Olkoon nyt $w_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin yhtälö $R(z) = w_0$ saadaan saatettua muotoon

$$\frac{P(z) - w_0 Q(z)}{Q(z)} = 0.$$

Polynomeilla P ja $P - w_0 Q$ ei ole yhteisiä tekijöitä, sillä muutoin päädytään ristiriitaan polynomien P ja Q yhteisien tekijöiden kanssa. Jos nyt

$$R_0(z) = \frac{P(z) - w_0 Q(z)}{Q(z)},$$

niin seuraa, että $\deg(R_0) = \deg(R) = p$. Toisaalta rationaalifunktiolla R_0 on tunnetusti p nollakohtaa, mistä väite seuraa. $\square$

Lause 2.1.9. *Laajennetun tason funktio on meromorfinen, jos ja vain jos se on rationaalinen.*

Todistus. Väitteen ensimmäinen osa on todistettu edellä.

Olkoon nyt $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfinen. Navattoman eli holomorfisen funktion tapaus voidaan sivuuttaa tuloksen 2.1.4 nojalla. Jos funktiolla f on äärettömän monta napaa, nämä muodostavat lukujonon $(z_j)_{j=1}^{\infty}$, jolla on kasautumisarvo laajennetun tason $\widehat{\mathbb{C}}$ kompaktiuden nojalla. Näin ollen funktiolla

f olisi eristämätön singulariteetti, mikä on ristiriita meromorfisuusoletuksen kanssa.

Olkoot nyt $z_1, \dots, z_n$ funktion f navat moninkertoinaan $a_1, \dots, a_n$. Voidaan olettaa, että $z_1 = \infty$, jolloin asetetaan

$$R_1(z) = \sum_{j=1}^{a_1} \alpha_{1,j} z^j,$$

ja muutoin

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(z - z_k)^j}, \quad 2 \leq k \leq n,$$

missä vakiokertoimet $\alpha_{k,j}$, $1 \leq k \leq n$, määräytyvät siitä, että funktiolla

$$f - R_k$$

on poistuva singulariteetti z_k. Toisin sanoen R_k koostuu funktion f pisteen z_k suhteen kehitetyn Laurentin sarjan termeistä, joiden eksponentti on negatiivinen. Tapaus $k = 1$ saadaan apufunktion $\widetilde{f}$ sarjaesitystä hyödyntäen. Nyt $f - \sum_k R_k$ on joukossa $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorfisena vakio $c \in \mathbb{C}$ Lauseen 2.1.4 nojalla ja täten

$$f = \sum_k R_k + c,$$

on rationaalifunktioiden summana rationaalinen. Väite seuraa. [5] □

Seuraa siis, että meromorfinen bijektio laajennetulta kompleksitasolta itselleen on välttämättä ensimmäisen asteen rationaalifunktio. Tällainen saa muodon

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{2.5}$$

Toisaalta funktion (2.5) derivaatalle

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}, \quad z \neq -\frac{d}{c},$$

minkä nojalla (2.5) ei ole vakio, jos ja vain jos vakiokertoimia sitoo ehto $ad - bc \neq 0$. Vertaamalla kuvausta f nyt matriisiin

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ehto $\det(M_f) = ad - bc \neq 0$ täyttyy, jos ja vain jos rivivektorit ovat lineaarisesti riippumattomia ja siis matriisi M_f on kääntyvä.

Määritelmä 2.1.10. Muotoa (2.5) olevia laajennetun kompleksitason itseiskuvauksia kutsutaan *Möbius-muunnoksiksi.* Käytetään näiden kokoelmasta merkintää $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Huomautus. Möbius-muunnoksista käytetään myös nimitystä *lineaarikuvaus*, joka perustuu englanninkieliseen termiin *linear fractional transformation.* [7]

Möbius-muunnoksen (2.5) käyttäytyminen äärettömyyspisteessä vastaa aiemman määrittelyn mukaisesti apufunktiota $\widetilde{f}$. Jos $c = 0$, tämä saa muodon

$$\widetilde{f}(z) = \frac{a + bz}{dz}$$

ja siis $f(\infty) = \infty$. Muutoin

$$\widetilde{f}(z) = \frac{a + bz}{c + dz},$$

minkä nojalla $f(\infty) = a/c$. Erityisesti $f(\infty) = \infty$, kun $c = 0$.

Seuraus 2.1.11. *Funktio* $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *on meromorfinen bijektio, jos ja vain jos se on Möbius.*

Todistus. Seuraa Lauseista 2.1.8 ja 2.1.9. □

Bijektiivisyytensä vuoksi Möbius-muunnokset voidaan käsittää konformeiksi koko laajennetulla tasolla $\widehat{\mathbb{C}}$. [5, s. 25]

2.2 Möbius-muunnokset

Ennen itse Möbius-muunnosten geometristen ominaisuuksien tarkastelua tutustutaan tason geometrisiin muunnoksiin kompleksianalyysin näkökulmasta.

2.2.1 Geometriset kuvaukset kompleksitasolla

Möbius-muunnokset liittyvät laajennetun kompleksitason ja Riemannin pallon lisäksi läheisesti myös tason $\mathbb{C}$ geometrisiin kuvauksiin. Ennen itse yhteyden toteamista vaaditaan tosin kyseisille kuvauksille kompleksilukujen algebraa hyödyntävät muodot. Tarkastelu perustuu teoksen [4] määritelmiin ja siten hyödyntää geometrian terminologiaa. Erityisesti jatkossa *yhtenevillä janoilla* tarkoitetaan intuitiivisesti yhtäpitkiä janoja, ja vastaavasti *yhtenevät suunnatut kulmat* ovat samoin suunnistetut sekä yhtäsuuret. Seuraaviin määritelmiin sisältyvät olemassaoloväitteet sivuutetaan. [4, ss. 22 – 23]

Siirto

Määritelmä 2.2.1. Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$ pisteitä. Jos z ei ole pisteiden a ja b kautta kulkevalla suoralla l_{ab}, niin on olemassa yksi ja vain yksi sellainen piste z', että nelikulmio $abz'z$ on suunnikas eli että janat ab ja zz' ovat yhtenevät. Jos taas z on suoralla l_{ab}, vastaavasti seuraa, että janat ab ja zz' yhtenevät vain yhdellä suoran l_{ab} pisteellä z'. Nyt sanotaan, että kuvaus $\tau_{ab} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jolle

$$\tau_{ab}(z) = z',$$

on tason *siirto* janan ab verran.

On huomattavaa, että jana ab oletetaan suunnatuksi. Toisin sanoen siis siirrot τ_{ab} ja τ_{ba} yleisesti eroavat toisistaan. Lisäksi tapauksessa $a = b$ saadaan identtinen kuvaus.

Suunnatulla suoralla l_{ab} on parametrisaationaan kuvaus $\gamma_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_{ab}(t) = (1-t)a + tb = a + (b-a)t,$$

ja vastaavasti suoralle $l_{zz'}$ saadaan parametrisaatio $\gamma_{zz'} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_{zz'}(t) = (1-t)z + tz' = z + (1-t)z'.$$

Kummassakin tapauksista $z \in l_{ab}$ ja $z \notin l_{ab}$ suorat l_{ab} ja $l_{zz'}$ ovat yhdensuuntaiset. Toisin sanoen

$$\gamma'_{ab}(t) = \gamma'_{zz'}(t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, ja näin ollen

$$b - a = z' - z.$$

Siirrolle τ_{ab} seuraa siis esitys

$$\tau_{ab}(z) = z' = z + (b-a). \tag{2.7}$$

Kierto

Määritelmä 2.2.2. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ kiinnitetty, olkoon $\theta \in]-\pi, \pi]$ suunnattu kulma, jonka kärki on pisteessä z_0, ja olkoon $z \in \mathbb{C}$ tason piste. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi sellainen piste $z' \in \mathbb{C}$, että janat $z_0 z$ ja $z_0 z'$ sekä suunnatut kulmat θ ja $\angle z z_0 z'$ ovat yhteneviä. Tällöin kuvaus $\sigma_{z_0,\theta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jolle

$$\sigma_{z_0,\theta}(z) = z', \quad z \neq z_0,$$

ja $\sigma_{z_0,\theta}(z_0) = z_0$, on tason *kierto* pisteen z_0 ympäri kulman θ verran.

Parametrisoidaan jälleen suunnatut suorat l_{z_0z} ja $l_{z_0z'}$. Saadaan kuvaukset $\gamma_{z_0z}, \gamma_{z_0z'} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\gamma_{z_0z}(t) &= (1-t)z_0 + tz = z_0 + (z-z_0)t,\\ \gamma_{z_0z'}(t) &= (1-t)z_0 + tz' = z_0 + (z'-z_0)t.\end{aligned}$$

Jos $z \neq z_0$, niin oletuksen nojalla tangenttivektorista $\gamma'_{z_0z}(0)$ alkava ja vektoriin $\gamma'_{z_0z'}(0)$ loppuva kulma on θ. Lisäksi seuraa, että $|z-z_0| = |z'-z_0|$, eli erityisesti $z' \neq z_0$. Näin ollen

$$\begin{aligned}i\theta &= i\arg(z'-z_0) - i\arg(z-z_0)\\ &= \big(\log|z'-z_0| + i\arg(z'-z_0)\big) - \big(\log|z-z_0| + i\arg(z-z_0)\big)\\ &= \log_1(z'-z_0) - \log_2(z-z_0),\end{aligned}$$

missä $\log_1$ ja $\log_2$ ovat sellaisia kompleksisen logaritmin haaroja, että θ on välillä $]-\pi,\pi]$. Siis

$$e^{i\theta} = e^{\log_1(z'-z_0)-\log_2(z-z_0)} = \frac{z'-z_0}{z-z_0},$$

ja tästä edelleen ratkaisemalla saadaan muoto

$$\sigma_{z_0,\theta}(z) = z' = z_0 + e^{i\theta}(z-z_0), \quad z \neq z_0, \tag{2.8}$$

joka toteuttaa myös ehdon $\sigma_{z_0,\theta}(z_0) = z_0$.

Toisaalta siitä, että eksponenttifunktion jakso on $2\pi i$, esitys (2.8) laajentaa kierron myös välin $]-\pi,\pi]$ ulkopuolisille kulmille.

Homotetia

Määritelmä 2.2.3. Olkoon z_0 kiinnitetty, ja olkoon $r > 0$ positiivinen. Jos $z \neq z_0$, on olemassa yksi ja vain yksi sellainen tason piste z', että $l_{z_0z} = l_{z_0z'}$ ja että lisäksi janojen z_0z' ja z_0z pituuksien suhde on r. Nyt määritellään, että *homotetia* keskuksenaan z_0 ja suhteenaan r, on se kuvaus $h_{z_0,r} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jolle

$$h_{z_0,r}(z) = z', \quad z \neq z_0,$$

ja $h_{z_0,r}(z_0) = z_0$.

Janan z_0z pituus on $|z-z_0|$ ja vastaavasti janan z_0z' taas $|z'-z_0|$. Näin ollen

$$|z'-z_0| = \frac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} \cdot |z-z_0| = r|z-z_0|, \quad z \neq z_0.$$

Lisäksi oletuksen $l_{z_0z} = l_{z_0z'}$ nojalla $\arg(z' - z_0) = \arg(z - z_0) = \alpha$ ja täten

$$z' - z_0 = |z' - z_0|e^{i\alpha} = r \cdot |z - z_0|e^{i\alpha} = r(z - z_0).$$

Seuraa siis, että

$$h_{z_0,r}(z) = z' = z_0 + r(z - z_0), \tag{2.9}$$

joka siirron (2.7) tapaisesti toteuttaa myös ehdon $h_{z_0,r}(z_0) = z_0$.

Ympyräinversio ja inversio

Määritelmä 2.2.4. Olkoot $r > 0$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$, ja olkoon C r-säteinen, z_0-keskinen ympyrä. Jos nyt $z \neq z_0$, niin puolisuoralla l_{z_0z} on yksi ja vain yksi sellainen piste z', että

$$|z - z_0| \cdot |z' - z_0| = r^2 \tag{2.10}$$

Tällöin *ympyräinversio* on se kuvaus $\rho_{z_0,r} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, jolle

$$\rho_{z_0,r}(z) = z'. \tag{2.11}$$

Ympyräinversion vaihtoehtoinen nimitys *ympyräpeilaus* tulee selväksi laajennetun tason ympyröiden käsittelyn yhteydessä.

Olkoon $z \neq z_0$. Parametrisoidaan nyt pisteiden z_0 ja z kautta kulkeva puolisuora asettamalla

$$\gamma_{z_0z}(t) = z_0 + A[z - z_0]t, \quad t \geq 0.$$

Tässä parametri t kuvaa janan pisteen $\gamma(t)$ etäisyyttä origosta. Näin ollen inversioehdosta (2.10) seuraten inversiopisteeksi z' saadaan

$$\rho_{z_0,r}(z) = z' = \gamma_{z_0z}\left(\frac{r^2}{|z - z_0|}\right) = z_0 + r^2\frac{z - z_0}{|z - z_0|^2} = z_0 + \frac{r^2}{\overline{\overline{z - z_0}}}, \tag{2.12}$$

ja siis

$$w_{z_0,r}(z) = \overline{\rho_{z_0,r}(z)} = \overline{z'} = \overline{z}_0 + \frac{r^2}{z - z_0}. \tag{2.13}$$

Kuvaus $w(z) = w_{0,1}(z) = 1/z$ saa nyt Yhtälön (2.13) mukaisen geometrisen merkityksen: konjugaattifunktio $z \mapsto \overline{z}$ vastaa nimittäin peilausta reaaliakselin suhteen, sillä sekä luvun $z = x + iy$ ja sen konjugaatin $\overline{z} = x - iy$ etäisyys reaaliakselista on $|y|$ [4, s. 89]. Täten w saadaan pisteestä z ensin peilaamalla yksikköympyrän suhteen ja lopuksi peilaamalla ympyräinversiopiste

z' reaaliakselin suhteen. Käytetään kuvauksesta $z \mapsto 1/z$ nimitystä *inversio* erotuksena ympyräinversiosta (2.12). [5, s. 10]

Yhteenvetona voidaan todeta, että jokainen kuvauksista (2.7), (2.8), (2.9) ja (2.13) on Lauseen 2.1.11 on meromorfinen bijektio laajennetulta tasolta itselleen. Ensimmäisten kolmen napa on äärettömyyspiste, kun taas inversio saa arvon ∞ muuttujan arvolla 0 ja arvon 0 muuttujan arvolla ∞. Kyseisten esitysten pohjalta on myös helppo todeta, että jokainen Möbius-muunnos on saatavissa yhdistettynä kuvauksena seuraavista:

1. siirroista τ_{ab} janan ab verran;
2. kierroista $\sigma_\theta = \sigma_{0,\theta}$ origon ympäri kulman θ verran;
3. homotetioista $h_r = h_{0,r}$ keskuksenaan origo ja suhteenaan r; ja
4. inversioista w.

Tapauksessa $c = 0$ tämä on nimittäin ilmeistä, ja muutoin

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d}, \qquad \lambda = \frac{bc-ad}{c},$$

kuten suora lasku osoittaa. [8, s. 298]

Kuten geometrisilta kuvauksilta voidaan odottaa, ne muodostavat suljetun ryhmän kuvausten yhdistämisen suhteen:

Lause 2.2.5. *Möbius-muunnosten yhdistetty kuvaus on Möbius-muunnos.*

Todistus. Määritellään Möbius-muunnokset f ja g yhtälöillä

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

missä $ad - bc \neq 0$ ja $a'd' - b'c' \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(z) &= \frac{ag(z)+b}{cg(z)+d} = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} \\
&= \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} \\
&= \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}.
\end{aligned}$$

Tässä

$$
\begin{aligned}
&(aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\
&= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\
&= a'd'(ad - bc) - b'c'(ad - bc) \\
&= (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0.
\end{aligned}
$$

Väite seuraa. □

Lauseen 2.2.5 nojalla Möbius-muunnosten yhdistäminen vastaa säännöllisten matriisien kertolaskua:

$$
f \circ g \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.
$$

Siis myös muunnoksen f käänteiskuvaus f^{-1} saadaan myös vastaavan kerroinmatriisin avulla:

$$
f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.
$$

Seuraus 2.2.6. (Möb, $\circ$) *on ryhmä.*

2.2.2 Laajennetun tason ympyrät

Kutsutaan *laajennetun tason ympyräksi* tason $\mathbb{C}$ ympyröitä ja suoria, ja käytetään näiden kokoelmasta merkintää $\mathscr{C}$. Nimityksen oikeuttaa se, että kumpikin näistä kuvautuu pallopinnan S^2 ympyröiksi stereografisessa projektiossa [1, s. 19]. Yhtälö

$$
\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0, \tag{2.14}
$$

missä α ja γ ovat reaalisia, β on kompleksinen ja

$$
\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma, \tag{2.15}
$$

kuvaa laajennetun tason ympyröitä ja vain niitä; tapaus $\alpha = 0$ antaa suorat ja $\alpha \neq 0$ ympyrät. Vakioita sitova ehto (2.15) on edellytyksenä sille, että Yhtälö (2.14) voidaan saattaa tavanomaiseen keskipistemuotoon $|z - z_0| = r^2$. Nimittäin merkitsemällä $z = x + iy$ ja $\beta = a + ib$ seuraa, että

$$
\begin{aligned}
\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma &= \alpha(x^2 + y^2) + (x + iy)(a + ib) + \overline{(x + iy)(a + ib)} + \gamma \\
&= \alpha x^2 + \alpha y^2 + 2xa - 2yb + \gamma
\end{aligned}
$$

ja siis Yhtälölle (2.14) saadaan ekvivalentti muoto

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2xa - 2yb + \gamma = 0. \tag{2.16}$$

Jos $\alpha = 0$, niin (2.16) kuvaa suoraa, jos ja vain jos $a^2 + b^2 \neq 0$ eli $\beta\overline{\beta} > 0 = \alpha\gamma$. Muutoin Yhtälön (2.16) vasen puoli on mahdollista täydentää neliöksi. Tällöin nimittäin

$$x^2 + y^2 + 2x \cdot \frac{a}{\alpha} - 2y \cdot \frac{b}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

mistä edelleen

$$\left(x + \frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{\alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{2.17}$$

Jotta (2.17) kuvaisi ympyrää, sen oikean puolen on oltava positiivinen, mistä ehto (2.15) nyt seuraa. [8, s. 298]

On ilmeistä, että siirrot, kierrot ja homotetiat säilyttävät yhdenmuotoisuuskuvauksina kokoelman $\mathscr{C}$ [4, Lause 101]. Tärkeä tulos on, että myös inversiokuvaus $z \mapsto 1/z$ käyttäytyy samoin: sijoittamalla $w = 1/z$ Yhtälöön (2.14) saadaan yhtälö

$$\frac{\alpha}{w\overline{w}} + \frac{\beta}{w} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

ja siis

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma w\overline{w} = 0. \tag{2.18}$$

Yhtälöt (2.14) ja (2.18) ovat samaa tyyppiä, koska kumpikin toteuttaa vaaditun ehdon (2.15). Täten:

Lause 2.2.7. *Möbius-kuvaus kuvaa kokoelman $\mathscr{C}$ itselleen.*

2.2.3 Kaksoissuhde

Määritelmä 2.2.8. Olkoon $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ järjestetty nelikko pareittain erisuuria kompleksilukuja. Näiden *kaksoissuhde* on luku

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}. \tag{2.19}$$

Jos $\alpha_j = \infty$ jollakin j, (2.19) korvataan vastaavalla raja-arvolla.

Osoittautuu, että Möbius-muunnoksen määrääminen tietynlaisten alueiden välille on yksinkertaista. Olkoon nimittäin jälleen $f \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Jos $z_j \in \widehat{\mathbb{C}}$, $1 \leq j \leq 4$, ja jos merkitään $w_j = f(z_j)$, seuraa, että

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Riittää tarkastella tapausta, jossa $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ ja $z_j \neq -d/c$, $z_j \neq \infty$, sillä muut seuraavat tästä asianmukaisina raja-arvoina. Tällöin nimittäin suoralla laskulla

$$\begin{aligned}
[w_1, w_2, w_3, w_4] &= \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)} = \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \cdot \frac{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} \\
&= \frac{(ad-bc)(z_1 - z_3)}{(ad-bc)(z_2 - z_3)} \cdot \frac{(ad-bc)(z_2 - z_4)}{(ad-bc)(z_1 - z_4)} = [z_1, z_2, z_3, z_4],
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. [5, ss. 25 – 27]

Seurauksena:

Lause 2.2.9. *Kaksoissuhde on Möbius-invariantti.*

Toisin sanoen on olemassa yksi ja vain yksi Möbius-muunnos, joka kuvaa kolmikon (z_1, z_2, z_3) kolmikoksi (w_1, w_2, w_3). Tällöin vaadittu kuvaus $w = f(z)$ saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$[w, w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3].$$

Tulos vastaa yhdenmuotoisuuskuvausten *kolmen pisteen sääntöä*: kolmen pisteen kuvautuminen määrää geometrisen kuvauksen yksikäsitteisesti, mikä on siis voimassa myös yleisesti Möbius-muunnoksille. [4, Lause 102]

Toisaalta kolme annettua ei-kollineaarista kompleksitason pistettä määräävät yksikäsitteisen ympyrän, ja taas toisaalta kaksi pistettä ovat aina kollineaariset. Näin ollen jokainen ympyrä voidaan kuvata jokaiselle ympyrälle Möbius-muunnoksella. Sama pätee myös suorille, sillä kolmanneksi pisteeksi voidaan valita esimerkiksi ∞. On siis myös mahdollista kuvata suora ympyräksi ja päinvastoin. Huomionarvoista on, että ympyrä kuvautuu suoraksi vain, jos Möbius-muunnoksen napa on kyseisellä ympyrällä. [8, s. 299]

Nyt avoimen kuvauksen lauseen 1.2.7 seurauksena:

Lause 2.2.10. *Jokainen avoin kiekko ja avoin puolitaso voidaan kuvata toisikseen Möbius-muunnoksella.*

On lisäksi huomattavaa, että tällaiset kuvaukset ovat aina konformeja.

Määritelmä 2.2.11. *Ylempi puolitaso* $\mathbb{H}$ on ehdon $\Im(z) > 0$ määräämä puolitaso. Vastaavasti *yksikkökiekko* $\mathbb{D}$ on kiekko $|z| < 1$.

Esimerkki 2.2.12. Olkoon f Möbius-muunnos

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Osoitetaan, että f kuvaa puolitason $\mathbb{H}$ kiekolle $\mathbb{D}$. Ensimmäisen määrää kolmikko $(0, 1, \infty)$, ja toisaalta näiden kuvapisteiksi saadaan kolmikko

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(\infty) = 1.$$

Näin ollen $f(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{D}$ kolmen pisteen säännön nojalla. Toisaalta $f(i) = 0$, joten todella $f(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. Lisäksi $f(i) = \infty$, eli toisin sanoen kuvauksen f napa on yksikköympyrällä $\partial\mathbb{D}$.

Nyt seuraa lisäksi, että yleisestikin kuvaus $w = e^{i\theta} f(z)$, $\theta \in \mathbb{R}$, kuvaa puolitason $\mathbb{H}$ kiekoksi $\mathbb{D}$.

2.3 Yksikkökiekko

Esitellään vielä lyhyesti kiekkoa $\mathbb{D}$ konformeja kuvauksia koskevia tuloksia sekä lisäksi tämän kytköksiä Möbius-kuvauksiin. Tärkeimpiä tällaisia tuloksia on *Schwarzin lemma*:

Lause 2.3.1. *Olkoon f holomorfinen kuvaus yksikkökiekolta $\mathbb{D}$ itselleen, ja oletetaan, että $f(0) = 0$. Tällöin $|f(z)| \leq |z|$ kaikille $z \in \mathbb{D}$, ja lisäksi $|f'(0)| \leq 1$. Jos nyt $|f(z)| = |z|$ jollakin $z \neq 0$ tai jos $|f'(0)| = 1$, niin f on muotoa*

$$f(z) = az \tag{2.20}$$

jollakin luvulla a, jolle pätee $|a| = 1$.

Todistus. Olkoon $0 < r < 1$, ja määritellään funktio g asettamalla

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad 0 < |z| < r,$$

ja $g(0) = f'(0)$. Tällöin oletuksesta $f(0) = 0$ seuraa sarjaesityksiä tarkastelemalla, että funktio g on analyyttinen origossa ja siis holomorfinen koko kiekossa $D(0, r)$. Nyt maksimiperiaatteen ja oletuksen $|f(z)| < 1$ nojalla

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \max_{|z|=r} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}.$$

Toisaalta luku r voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua 1, joten

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1. \tag{2.21}$$

Ensimmäinen väite seuraa.

Oletetaan nyt, että $|f(z_0)| = |z_0|$ jollakin $|z_0| < 1$. Tällöin toisaalta $|g(z_0)| = 1$, joten Yhtälön (2.21) nojalla $|g|$ saavuttaa suurimman arvonsa jossakin kiekon $\mathbb{D}$ sisäpisteessä. Näin ollen maksimiperiaatteen mukaan $|g|$ on vakio 1, ja siis f on muotoa (2.20).

Epäyhtälön (2.21) nojalla seuraa lisäksi, että välttämättä $|f'(0)| \leq 1$. Vastaavasti yhtäsuuruudesta $|f'(0)| = 1$ seuraa esitys (2.20). [7, s. 166] □

Lauseen 2.3.1 mukainen kuvaus f siis pitää origon muuttumattomana sekä lisäksi kuvaa muut pisteet joko samalle tai pienemmälle etäisyydelle origosta.

Seuraavat Schwarzin lemmaan pohjautuvat tulokset mukailevat teosta [8, s. 270 – 273].

Lause 2.3.2. *Biholomorfismit yksikkökiekolta $\mathbb{D}$ itselleen ovat kaikki muotoa*

$$\varphi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |z| < 1, \tag{2.22}$$

missä $|a| < 1$ ja $\theta \in [0, 2\pi[$.

Olkoon $a \in \mathbb{D}$. Koska vakiokerroin $e^{i\theta}$ ei vaikuta funktion $\varphi_{a,\theta}$ moduliin, riittää tutkia tapausta $\theta = 0$ eli funktioparvea $\varphi_a = \varphi_{a,0}$. Funktion φ_a ainut napa $1/\overline{a}$ on selvästi kiekon $\mathbb{D}$ ulkopuolella, eli $\varphi_a \in H(\mathbb{D})$, ja

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2, \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}. \tag{2.23}$$

Itse todistusta ennen käydään läpi eräs maksimointiongelma, jonka kuvaukset (2.22) toteuttavat:

Esimerkki 2.3.3. Olkoot nyt $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$. Osoitetaan, että jos f on kiekon $\mathbb{D}$ biholomorfismi, jolle $f(\alpha) = \beta$ ja joka maksimoi luvun $|f'(\alpha)|$, niin f on välttämättä muotoa (2.22). Määritellään

$$g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}. \tag{2.24}$$

Täten g kuvaa pisteen 0 itselleen, joten Schwarzin lemman 2.3.1 ovat voimassa. Toisaalta ketjusäännöllä $g'(0) = \varphi_\beta'(\beta)f'(\alpha)\varphi_{-\alpha}'(0)$, joten Yhtälöiden (2.23) nojalla

$$|g'(0)| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; |f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}. \tag{2.25}$$

Yhtäsuuruus on mahdollinen Epäyhtälöissä (2.25). Toisaalta Schwarzin lemmasta seuraa nyt, että jos $|f'(a)|$ on suurimmillaan, niin g on välttämättä muotoa (2.20) ja vastaavasti f muotoa (2.22).

Edetään nyt Lauseen 2.3.2 todistukseen:

Todistus. Suoralla sijoituksella

$$\varphi_a(\varphi_{-a}(z)) = z,$$

joten $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$. Lisäksi kaikilla $t \in [0, 2\pi[$

$$|\varphi_a(e^{it})| = \left|\frac{e^{it} - a}{1 - \overline{a}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \overline{a}}\right| = 1,$$

joten $\varphi_a(S^1) = S^1$, ja vastaavalla laskulla $\varphi_{-a}(S^1) = S^1$. Soveltamalla nyt maksimiperiaatetta kumpaankin funktioista φ_a ja φ_{-a} seuraa, että

$$\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

Olkoon nyt f on kiekon $\mathbb{D}$ biholomorfismi, jolle $f(a) = 0$. Jos g tämän käänteisfunktio, niin Lauseen 1.2.5 nojalla myös g on kiekon $\mathbb{D}$ biholomorfismi, ja

$$g'(0)f'(a) = 1. \tag{2.26}$$

Soveltamalla jälkimmäistä ehdoista (2.25) molempiin funktioista f ja g seuraa, että

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}, \quad |g'(0)| \leq 1 - |a|^2.$$

Toisaalta (2.26) pakottaa yhtäsuuruuden Esimerkin 2.3.3 maksimointiongelmaan, joten todetusti f on muotoa (2.22).

Väite seuraa. □

Käsitellään vielä lyhyesti kiekon $\mathbb{D}$ roolia hyperbolisessa geometriassa. Edeltävän Lauseen 2.3.2 nojalla Möbius-muunnoksilla on tässä osansa. Esitellään kuitenkin ensin Schwarzin lemman 2.3.1 seuraus, joka tunnetaan *Schwarz-Pickin lauseena*:

Seuraus 2.3.4. *Jos f on holomorfinen kuvaus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, niin pätee arvio*

$$\left|\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{1 - \overline{f(\alpha)}f(\beta)}\right| \leq \left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right|.$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$.

Todistus. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, ja käytetään Esimerkin 2.3.3 merkintöjä. Tällöin Schwarzin lemman 2.3.1 nojalla

$$\left|\frac{f(\alpha) - f(\varphi_{-\alpha}(z))}{1 - \overline{f(\alpha)} f(\varphi_{-\alpha}(z))}\right| = |g(z)| \leq |z|.$$

Toisaalta $\varphi_a(\beta) = z_0$ jollakin $z_0 \in \mathbb{D}$. Näin ollen

$$\left|\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{1 - \overline{f(\alpha)} f(\beta)}\right| \leq |\varphi_a(\beta)| = \left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right|,$$

mistä väite seuraa. □

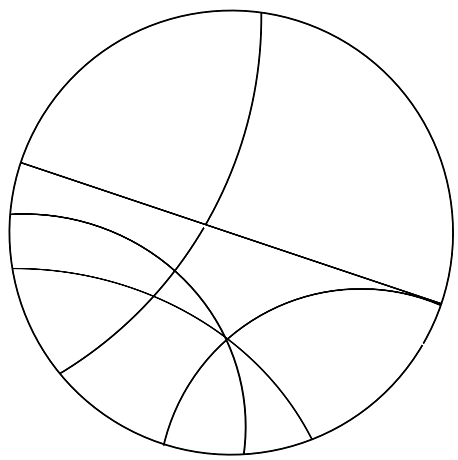
Yhtälön

$$d_{\mathrm{P}}(z_1, z_2) = \tanh^{-1}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|$$

voidaan osoittaa määrittelevän metriikan d_{P} yksikkökiekolle $\mathbb{D}$. Schwarz-Pickin lauseen mukaan siis

$$d_{\mathrm{P}}(f(z_1), f(z_2)) \leq d_{\mathrm{P}}(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Lisäksi Schwarzin lemman toisesta osasta seuraa, että yhtäsuuruus on voimassa joillakin $z_1 \neq z_2$, jos ja vain jos f on Möbius-kuvaus ja täten muotoa (2.22) [5, s. 71].



Kuva 4: Poincarén kiekko ja hyperbolisia suoria.

Kiekko $\mathbb{D}$ tunnetaan tässä kontekstissa *Poincarén*[3] *kiekkona*, ja vastaavasti metriikkaa d_{P} kutsutaan *Poincarén metriikaksi* [5, s. 35].

[3] *Henri Poincaré* (1854 – 1912), ranskalainen yleisnero ja matemaatikko, joka julkaisi yli 400 julkaisua koko 34-vuotisen uransa aikana [3, ss. 126 – 130].

Lause 2.3.5. *Poincarén metriikka d_P on metriikka.*

Todistus. Hyperboliselle tangentille $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee määritelmän mukaisesti

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi $D \tanh x = (\cosh^2 x)^{-1}$, joten tanh on aidosti kasvavana funktiona myös bijektio. Toisaalta tällöin myös sen käänteisfunktio $\tanh^{-1}$ on aidosti kasvava. Lisäksi $\tanh^{-1} 0 = 0$.

1. Olkoon nyt $z_0 \in \mathbb{D}$. Nyt $d_P(z_0, z) = \tanh^{-1} |\varphi_{z_0}(z)|$ ja siis todistuksen alun nojalla $d_P(z_0, z) \geq 0$. Toisaalta funktion φ_{z_0} bijektiivisyydestä seuraa, että $d_P(z_0, z) = 0$, jos ja vain jos $z = z_0$, mikä osoittaa positiividefiniittisyyden.

2. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Konjugoinnin lineaarisuuden ja yhtäsuuruuden $|w| = |\overline{w}|$, $w \in \mathbb{C}$, nojalla seuraa, että

$$\big|\varphi_{z_1}(z_2)\big| = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|} = \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \overline{\overline{z}_1 z_2}|} = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_2 z_1}\right| = \big|\varphi_{z_2}(z_1)\big|,$$

mikä taas puolestaan osoittaa symmetrisyysväitteen $d_P(z_1, z_2) = d_P(z_2, z_1)$.

3. Olkoot $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Jos nyt $z_j = z_k$ joillakin $j \neq k$, kolmioepäyhtälö

$$d_P(z_1, z_2) \leq d_P(z_1, z_0) + d_P(z_0, z_2) \tag{2.27}$$

on triviaalisti voimassa todistuksen alkuosan perusteella. Voidaan siis olettaa, että pisteet z_j ovat erillisiä. Tällöin on olemassa Möbius-muunnos $\varphi = \varphi_{a,\theta} \in H(\mathbb{D})$, jolle

$$w_0 = \varphi(z_0) = 0, \quad w_1 = \varphi(z_1) = \frac{3}{4}, \quad w_2 = \varphi(z_2) = \frac{7}{8}.$$

Nyt $d_P(w_1, w_2) = \tanh^{-1} \frac{4}{11}$, ja vastaavasti

$$\begin{aligned} d_P(w_1, w_0) + d_P(w_0, w_2) &= \tanh^{-1} \frac{3}{4} + \tanh^{-1} \frac{7}{8} \\ &> 2 \tanh^{-1} \frac{3}{4} > \tanh^{-1} \frac{3}{4} \\ &> \tanh^{-1} \frac{4}{11} = d_P(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Toisaalta Schwarz-Pickin lauseen seurauksena yhtäsuuruus $d_P(z_i, z_j) = d_P(w_i, w_j)$ on todetusti voimassa kaikilla i, j, mikä todistaa kolmioepäyhtälön (2.27).

Väite seuraa. □

Huomautus. Koska areahyperbolinen tangentti $\tanh^{-1}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

Poincarén metriikalle saadaan vaihtoehtoinen esitys

$$d_{\mathrm{P}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}.$$

Yksikkökiekko muodostaa *hyperbolisen geometrian* mallin, kun *hyperbolisiksi suoriksi* määritellään kiekon reunaympyrää vasten kohtisuorat ympyränkaaret ja lisäksi tämän halkaisijat. Molemman tyypin suorat kuvautuvat siis stereografisessa projektiossa Riemannin pallon S^2 isoympyränkaariksi.

Nyt on osoitettavissa, että malli toteuttaa kaikki teoksessa [4] esitellyt tasogeometrian aksioomat paitsi paralleeliaksiooman: nimittäin mitkä tahansa hyperboliset suorat voidaan palauttaa suoriksi sopivin Möbius-muunnoksin, ja vastaesimerkki paralleeliaksioomalle syntyy taas suorista $x = 0$ ja $y = 0$ sekä ympyrästä

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1.$$

Suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee itse asiassa äärettömän monta suoraa, jotka eivät leikkaa alkuperäistä suoraa; edeltävässä esimerkissä kyseisen ehdon toteuttaa muun muassa normaalimuotoinen suoraparvi $ax + by = 0$, missä normaalin (a, b) ja x-akselin välinen kulma kuuluu välille $[0, \frac{\pi}{2}]$. [3, s. 118 – 119]

3 Konformi ekvivalenssi

Päinvastoin kuin edeltävissä luvuissa 1 ja 2, joissa tarkasteltiin annetun konformikuvauksen ominaisuuksia, teorian kannalta olennainen kysymys on toisaalta myös se, millä ehdoin kahden annetun alueen Ω ja Ω' välillä on olemassa konformikuvaus. Asetetaankin nyt, että alueita $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ kutsutaan *konformisti ekvivalenteiksi*, jos on olemassa konformi bijektio $f \in H(\Omega)$, jolle $f(\Omega) = \Omega'$. Saatu relaatio on todettavissa ekvivalenssiksi, sillä konformit bijektiot ja siis biholomorfismit $f : \Omega \to \Omega'$ muodostavat ryhmän kuvausten yhdistämisen suhteen.

Jo alueen Ω topologiset ominaisuudet itsessään asettavat rajoitteita vaadittujen konformikuvausten olemassaololle, sillä jokainen biholomorfismi on todetusti myös homeomorfismi. Näin ollen ekvivalenssin käsittelyyn tarvitaan apukäsitteitä:

3.1 Yhtenevyysluokat

Määritelmä 3.1.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$. Tällöin joukon Ω *komponentti* on järjestyksen $\subset$ suhteen maksimaalinen yhtenäinen osajoukko $\Gamma \subset \Omega$.

Huomautus. Yhtenäistä osajoukkoa $\Gamma \subset \Omega$ kutsutaan maksimaaliseksi, jos ei ole olemassa yhtään sellaista yhtenäistä $\Gamma' \subsetneq \Omega$, että $\Gamma \subsetneq \Gamma'$.

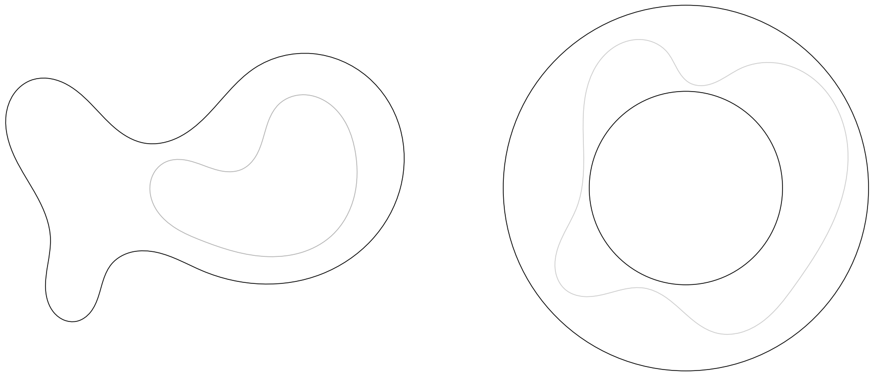
Joukon komponentit määräävät selvästi sen osituksen [8, s. 213].

Tarkastellaan, mitä seurauksia alueiden Ω ja Ω' konformilla ekvivalenssilla on. Seurauksesta 1.2.5 saadaan, että määritelmän mukaisen konformin bijektion $f : \Omega \to \Omega'$ käänteiskuvaus $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ on sekin konformi bijektio. Näin ollen f on alueiden Ω ja Ω' välinen homeomorfismi. Toisin sanoen seuraa, että konformisti samat alueet ovat välttämättä myös topologisesti samat.

Otetaan jatkoa varten käyttöön *Jordanin käyrälauseena* tunnettu lause, jonka nojalla suljettu yksinkertainen käyrä eli *Jordan-käyrä* jakaa tason kahteen alueeseen:

Lause 3.1.2. *Olkoon $C \subset \mathbb{C}$ Jordan-käyrä. Tällöin sen komplementti $\mathbb{C} \setminus C$ koostuu kahdesta komponentista, joista toinen on rajoittamaton* (käyrän C *ulkopuoli*) *ja toinen taas rajoitettu* (*käyrän* C sisäpuoli).

Tuloksensa intuitiivisuudesta huolimatta Lauseen 3.1.2 todistus on työläs ja se vaatisi topologisia apumääritelmiä. Näin ollen sen esitteleminen ei palvelisi tämän tutkielman tarkoitusta ja se siis sivuutetaan [7, s. 2]. Kaikesta huolimatta Jordanin käyrälause on taustalla muun muassa joissakin kompleksiseen integrointiin liittyvissä käsitteissä ja tuloksissa, kuten indeksin määritelmässä sekä residylauseessa.



(a) Yhdesti yhtenäinen alue. (b) Useasti yhtenäinen alue.

Kuva 5: Alueiden yhtenevyysluokittelua.

Määritelmä 3.1.3. Aluetta $\Omega \subset \mathbb{C}$ kutsutaan *yhdesti yhtenäiseksi*, jos ei ole olemassa sellaista pistettä $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eikä sellaista Jordan-käyrää $C \subset \Omega$, että piste z_0 olisi käyrän C sisäpuolella. Muutoin sanotaan, että alue Ω on *useasti yhtenäinen.*

Huomautus. Toisin sanoen Ω on yhdesti yhtenäinen, jos

$$\mathrm{Ind}_C(z_0) = 0$$

on voimassa kaikilla suljetuilla yksinkertaisilla käyrillä $C \subset \Omega$ ja komplementin pisteillä $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Lause 3.1.4. *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen. Jos nyt $\Omega' \subset \mathbb{C}$ on alue ja jos on olemassa konformi bijektio $f : \Omega \to \Omega'$, niin myös Ω' on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon $C' \subset \Omega'$ Jordan-käyrä, ja olkoon $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega'$. Koska käänteiskuvaus $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ on oletuksen nojalla bijektio, myös käyrä $C = f^{-1}(C') \subset \Omega$ on Jordan. Toisaalta alueen Ω' määritelmän mukaan yhtälöllä $f(z) = w_0$ ei ole ratkaisuja alueessa Ω ja edelleen alueen Ω yhdesti yhtenäisyyden nojalla myöskään käyrän C sisäpuolella. Näin ollen argumentin periaatteen 1.1.2 mukaisesti

$$\mathrm{Ind}_{C'}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}w}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \mathrm{d}z = 0,$$

mistä väite seuraa. □

Lauseen 3.1.4 nojalla seuraa konformin ekvivalenssin symmetrisyyden nojalla, että itse asiassa yhdesti yhtenäisen alueen Ω kanssa konformisti ekvivalentti alue on sekin välttämättä yhdesti yhtenäinen. Näin ollen on oikeutettua käsitellä yhdesti ja useasti yhtenäisten alueiden konformikuvaukset erikseen.

3.2 Yhdesti yhtenäiset alueet

3.2.1 Logaritmin holomorfisuus

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue, ja olkoon $f \in H(\Omega)$. Kompleksisen integroinnin perustuloksia on Cauchyn lause, jonka nojalla

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{3.1}$$

kaikilla suljetuilla käyrillä $C \subset \Omega$ eli että funktion f kompleksiset käyräintegraalit riippuvat vain integrointikäyrän alku- ja loppupisteestä, jos ja vain jos on olemassa sellainen $F \in H(\Omega)$, että $F' = f$ [1, s. 107].

Residylauseen seurauksena saadaan taas toisaalta, että vain käyrän C sisäpuolelle jäävät funktion f singulariteetit vaikuttavat integraalin (3.1) arvoon. Esimerkiksi

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i,$$

kun yksikköympyrä $\partial\mathbb{D}$ on kerran positiivisesti suunnistettu. Vaikka siis pätisi $f \in H(\Omega)$, yhtäsuuruus (3.1) ei välttämättä päde. Siitä, että (3.1) on voimassa jokaisella $f \in H(\Omega)$, voidaan puolestaan vakuuttua vain, jos $\mathrm{Ind}_C(z) = 0$ kaikilla $z \notin \Omega$ eli toisin sanoen, kun Ω on yhdesti yhtenäinen.

Oletetaan nyt, että Ω yhdesti on yhtenäinen. Jos siis edelleen $f \in H(\Omega)$ ja lisäksi $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$, niin asettamalla $g = f'/f$ seuraa holomorfinen funktio $g \in H(\Omega)$. Toisaalta

$$\int_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

sillä funktiolla f ei ole oletuksen nojalla nollakohtia eikä siis funktiolla g napoja käyrän C sisäpuolella. Täten on olemassa sellainen $F \in H(\Omega)$, että $F' = f'/f$. Edelleen Lauseen 1.2.4 todistusta mukaillen seuraa, että funktion $f(z)e^{-F(z)}$ derivaatta on identtisesti nolla alueessa Ω, jolloin se redusoituu vakioksi. Lisäämällä funktioon F sopiva vakiotermi saadaan siis yhtäsuuruus $f(z) = e^{F(z)}$, eli toisin sanoen funktiolla f on tällöin alueessa Ω holomorfinen logaritmi F. Tämä on yksi monihaaraisen funktion $\log f$ haaroista, jotka eroavat tunnetusti toisistaan luvun $2\pi i$ moninkerroilla.

Yleinen kompleksinen eksponenttifunktio määritellään logaritmin ja eksponenttifunktion avulla asettamalla

$$a^b = e^{b \log a}, \quad a \neq 0. \tag{3.2}$$

Näin ollen esimerkiksi juurifunktio $f(z) = z^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, perii monihaaraisuutenssa suoraan logaritmilta. Tärkeänä seurauksena saadaan:

Lemma 3.2.1. *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen. Jos tällöin $f \in H(\Omega)$ on sellainen funktio, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$, on mahdollista valita alueessa Ω holomorfinen haara funktioille* $\log f$ *ja* $\sqrt[n]{f}$. [1, s. 142]

3.2.2 Riemannin kuvauslause

Yhdesti yhtenäiset alueet ovat siitä poikkeavia, sillä ne toteuttavat *Riemannin kuvauslauseena* tunnetun tuloksen:

Lause 3.2.2. *Jokainen yhdesti yhtenäinen, tasoon aidosti sisältyvä alue Ω on konformisti ekvivalentti yksikkökiekon $\mathbb{D}$ kanssa.*

Toisin sanoen jokainen yhdesti yhtenäinen alue on konformisti ekvivalentti joko tason $\mathbb{C}$ tai kiekon $\mathbb{D}$ kanssa.

Lauseen 3.2.2 kauneus piilee jo itsessään siinä, ettei se takaa ainoastaan topologista samuutta yhdesti yhtenäisille, tasoon aidosti sisältyville alueille. Jos nimittäin Ω ja Ω' täyttävät vaaditut oletukset, seuraa konformi bijektio $\varphi : \Omega \to \Omega'$. Täten yhtälön

$$h(f) = f \circ \varphi, \quad f \in H(\Omega),$$

määrittelemä bijektiivinen kuvaus $h : H(\Omega) \to H(\Omega')$ täyttää ehdot

$$h(f+g) = h(f) + h(g), \quad h(fg) = h(f)h(g), \quad f, g \in H(\Omega),$$

ja siis on isomorfismi. Näin ollen rengasta $H(\Omega)$ voidaan käsitellä mahdollisesti yksinkertaisemman renkaan $H(\Omega')$ avulla, mikä johtaa konventionaaliseen valintaan $\Omega' = \mathbb{D}$.

Riemannin kuvauslauseen 3.2.2 antama konformi bijektio $f : \Omega \to \mathbb{D}$ on jopa *yksikäsitteinen*:

Lause 3.2.3. *Olkoon Ω on kuin Lauseessa 3.2.2, ja olkoon $w_0 \in \Omega$ jokin piste ja $\alpha \in [0, 2\pi[$ jokin luku. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi konformi bijektio $f : \mathbb{D} \to \Omega$, jolle $f(0) = w_0$ ja $\arg f'(0) = \alpha$.*

Todistus. Riittää siis määrätä origoa vastaava piste sekä positiivista reaaliakselia vastaava suunta [7, s. 175]. Jos nimittäin f_1 ja f_2 ovat kumpikin konformeja bijektioita $\mathbb{D} \to \Omega$, niin $f = f_2^{-1} \circ f_1$ kuvaa yksikkökiekon $\mathbb{D}$ biholomorfisesti itselleen ja siten on Möbius. Lisäksi $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, joten $a = 0$, $\theta = \pi$ kaavassa (2.3.2). Siis $f(z) \equiv z$ identtisesti ja edelleen $f_1 = f_2$, mistä väite seuraa. [1, s. 230] $\square$

Riemannin kuvauslauseelle on olemassa useita erilaisia todistuksia. Suuri osa hyödyntää *normaaleja kuvausperheitä* [1, 7, 8].

Määritelmä 3.2.4. Alueen Ω kompleksiarvoisten kuvausten jonon (f_n) sanotaan *suppenevan tasaisesti alueen* Ω *kompakteissa osajoukoissa kohti rajafunktiota* f, jos jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ ja positiivista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\bigl|f_n(z) - f(z)\bigr| < \varepsilon,$$

kun $z \in K$ ja $n \geq n_\varepsilon$.

Huomautus. Kyseinen tasaisen suppenemisen käsite yhtenee reaalianalyysin tasaisen suppenemisen käsitteen kanssa jo suoraan määritelmänsä nojalla.

Seuraus 3.2.5. *Jos* $f_n \to f$ *tasaisesti ja jos funktiot* f_n *ovat jatkuvia alueessa* Ω *kaikilla indekseillä* $n = 1, 2, \ldots$*, niin myös rajafunktio* f *on jatkuva alueessa* Ω*. Lisäksi käyrälle* $C \subset \Omega$ *on tällöin voimassa*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.3}$$

Seuraus 3.2.5 todistetaan vastaavasti kuin reaalinen vastineensa. Tärkeintä on huomata, että koska suppeneminen on tasaista kompaktissa osajoukossa $K \subset \Omega$, rajafunktio f on jatkuva joukossa K. Edelleen siitä, että kompakti joukko $K \subset \Omega$ valittiin mielivaltaisesti, seuraa, että f on jatkuva koko alueessa Ω.

Määritelmä 3.2.6. Olkoon Ω alue. Tällöin kuvausperhettä $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ kutsutaan *normaaliksi*, jos jokaisella kokoelman $\mathscr{F}$ jonolla on kompakteissa osajoukoissa $K \subset \Omega$ tasaisesti suppeneva osajono. Rajafunktion ei itse tarvitse kuulua perheeseen $\mathscr{F}$.

Tarkastellaan nyt muitakin Riemannin kuvauslauseen todistuksessa käytettäviä apukäsitteitä ja -tuloksia.

Lemma 3.2.7. *Jokainen avoin joukko* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *saadaan yhdisteenä kompaktien joukkojen jonosta* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$*, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

1. K_n *koostuu joukon* K_{n+1} *sisäpisteistä,* $n = 1, 2, \ldots$*;*
2. *jos* $K \subset \Omega$ *on kompakti, niin* $K \subset K_n$ *jollakin* n*; ja*
3. *jokainen joukon* $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ *komponenteista sisältää joukon* $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ *komponentin.*

Lemman 3.2.7 todistuksen suhteen viitataan teokseen [8, ss. 285 – 286].

Seuraava tulos tunnetaan *Weierstrassin lauseena*:

Lause 3.2.8. *Olkoot $f_n \in H(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, ja oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti alueen Ω kompakteissa osajoukoissa. Tällöin $f \in H(\Omega)$, ja lisäksi $f_n' \to f'$ tasaisesti alueen Ω kompakteissa osajoukoissa.*

Todistus. Seurauksen 3.2.5 nojalla rajafunktio f on jatkuva alueessa Ω. Olkoon nyt $\Delta \subset \Omega$ suljettu kolmio. Tällöin Δ on alueen Ω kompakti osajoukko, joten $f_n \to f$ tasaisesti joukossa Δ. Näin ollen Cauchyn lauseen nojalla

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{(3.3)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

ja siis Moreran lauseesta seuraten $f \in H(\Omega)$.

Jos taas $K \subset \Omega$ on kompakti, on olemassa sellainen $r > 0$, että suljettujen kiekkojen $\overline{D}(z, r)$, $z \in K$, yhdiste E on alueen Ω kompakti osajoukko. Toisaalta Lause 1.1.1 antaa arvion

$$\left|f'(z) - f_n'(z)\right| \leq \frac{1}{r}\left\|f - f_n\right\|_{\Omega}, \quad z \in K.$$

Oletuksen nojalla on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $\left\|f - f_n\right\|_{\Omega} < r\varepsilon$, kun $n \geq n_\varepsilon$. Näin ollen

$$\left|f'(z) - f_n'(z)\right| \leq \frac{1}{r}\left\|f - f_n\right\|_{\Omega} < \varepsilon,$$

kun $n \geq n_\varepsilon$. Väite seuraa. [8, s. 230] □

Lause 3.2.9. *Olkoon $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ alueen Ω kompakteissa osajoukoissa tasaisesti rajoitettu kokoelma funktioita. Toisin sanoen siis oletetaan, että jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ vastaa sellainen luku $0 < M_K < \infty$, että $|f(z)| < M_K$ kaikilla $f \in \mathscr{F}$ ja $z \in \Omega$. Tällöin $\mathscr{F}$ on normaali kuvausperhe.*

Todistus. Lemma 3.2.7 antaa sellaisen jonon alueen Ω kompakteja osajoukkoja (K_n), että K_n koostuu joukon K_{n+1} sisäpisteistä, $n = 1, 2, \ldots$. Toisaalta on olemassa sellainen $\delta_n > 0$, että

$$D(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1}$$

kaikilla $z \in K_n$.

Olkoot nyt $z', z'' \in K_n$ sellaisia pisteitä, että $|z' - z''| < 2\delta_n$, ja olkoon C z'-keskinen, $2\delta_n$-säteinen ympyrä, jolle $\mathrm{Ind}_C(z') = 1$. Osamurtokehitelmällä

$$\frac{1}{\zeta - z'} - \frac{1}{\zeta - z''} = \frac{z' - z''}{(\zeta - z')(\zeta - z'')},$$

joten Cauchyn integraalikaavan nojalla seuraa, että funktiolle $f \in \mathscr{F}$

$$f(z') - f(z'') = \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z')(\zeta - z'')} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Toisaalta $|\zeta - z'| = 2\delta_n$ ja $|\zeta - z''| > \delta_n$ kaikilla $\zeta \in C$. Näin ollen saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\big|f(z') - f(z'')\big| &= \left| \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z')(\zeta - z'')} \, \mathrm{d}\zeta \right| \\
&\leq \frac{|z' - z''|}{2\pi} \int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z'||\zeta - z''|} |\mathrm{d}\zeta| \\
&\leq \frac{|z' - z''|}{2\pi} \int_C \frac{M_{K_{n+1}}}{2\delta_n \cdot \delta_n} |\mathrm{d}\zeta| \\
&\leq \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} |z' - z''|,
\end{aligned}$$

eli

$$\big|f(z') - f(z'')\big| \leq \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} |z' - z''|, \tag{3.4}$$

kun $\big|f(z') - f(z'')\big| \leq \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} |z' - z''|$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Vaaditaan nyt, että tätä vastaa sellainen $\delta > 0$, että $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/3$ kaikilla $f \in \mathscr{F}$ ja $z_1, z_2 \in K_n$, $|z' - z''| < \delta$. Vertaamalla tätä arvioon (3.4) seuraa, että voidaan valita

$$\delta = \frac{\delta_n \cdot \varepsilon/3}{\varepsilon/3 + M_{K_{n+1}}}.$$

Tällöin nimittäin

$$\delta = \frac{\delta_n \cdot \varepsilon/3}{\varepsilon/3 + M_{K_{n+1}}} < \frac{\delta_n \cdot \varepsilon/3}{\varepsilon/3 + 0} = \delta_n,$$

joten ehdon $|z' - z''| < \delta$ ollessa voimassa myös $|z' - z''| < \delta_n$ ja siis (3.4) pätevät. Edelleen

$$\begin{aligned}
\big|f(z') - f(z'')\big| &\leq \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} |z' - z''| < \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} \delta = \frac{M_{K_{n+1}}}{\delta_n} \cdot \frac{\delta_n \cdot \varepsilon/3}{\varepsilon/3 + M_{K_{n+1}}} \\
&< \frac{\varepsilon/3 \cdot M_{K_{n+1}}}{\varepsilon/3 + M_{K_{n+1}}} < \frac{\varepsilon/3 \cdot M_{K_{n+1}}}{0 + M_{K_{n+1}}} = \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

kun $|z' - z''| < \delta$.

Olkoon nyt (f_m) jono kokoelman $\mathscr{F}$ funktioita. Oletetaan että $E \subset \Omega$ on sellainen numeroituva osajoukko, että $E \cap K_n$ on tiheä[4] joukossa K_n. Numeroituvuuden nojalla joukon E alkiot muodostavat jonon (w_i). Toisaalta lukujono $(f_m(z))$ on rajoitettu kaikilla $z \in \Omega$, joten jonolla (f_m) on pisteessä w_1 suppeneva osajono, josta käytetään merkintää $(f_{m,1})$. Vastaavasti jonolla $(f_{m,1})$ on pisteessä w_2 suppeneva osajono $(f_{m,2})$, joka suppenee myös pisteessä w_1, ja yleisesti jonolla $(f_{m,j-1})$ pisteessä w_j suppeneva osajono $(f_{m,j})$, joka suppenee pisteissä w_i, $i \leq j$. Nyt seuraa, että diagonaalijono $(f_{m,m})$ suppenee koko joukossa E.

Olkoon $n_0 \in \mathbb{N}$. Kompaktiuden määritelmä antaa sellaiset pisteet

$$z_1, \ldots, z_p \in E \subset K_{n_0},$$

että kiekot $D(z_i, \delta)$ peittävät joukon K_{n_0}. Lisäksi jonot $\big(f_{m,m}(z_i)\big)$, $1 \leq i \leq p$, ovat suppenevina Cauchyja. Saadaan siis sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| < \varepsilon,$$

kun $r > n_\varepsilon$, $s > n_\varepsilon$ ja $1 \leq i \leq p$.

Olkoon $z \in K_{n_0}$, missä $n_0 \in \mathbb{N}$. Tällöin z kuuluu ainakin yhteen kiekoista $D(z_i, \delta)$, joten $|z - z_{i_0}| < \delta$ ainakin yhdellä $1 \leq i_0 \leq p$. Toisaalta kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned} |f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| \leq |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(z_{i_0})| + |f_{r,r}(z_{i_0}) - f_{s,s}(z_{i_0})| \\ + |f_{s,s}(z_{i_0}) - f_{s,s}(z)|. \end{aligned}$$

Koska jono $(f_{m,m})$ suppenee pisteessä z_{i_0}, termeistä ensimmäinen ja kolmas ovat lukua $\varepsilon/3$ pienempiä luvun δ valinnasta seuraten. Termeista toinen toteuttaa saman ehdon, jos $r > n_\varepsilon$ ja $s > n_\varepsilon$. Siis

$$|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kun $z \in K_{n_0}$ ja $r > n_\varepsilon$, $s > n_\varepsilon$. Väite seuraa. [8, ss. 300 – 301] □

Edetään todistamaan Riemannin kuvauslause.

Todistus. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen, tasoon aidosti sisältyvä alue. Käytetään merkintää $\Sigma \subset H(\Omega)$ siitä funktiokokoelmasta, jonka alkiot kuvaavat alueen Ω injektiivisesti kiekolle $\mathbb{D}$. Tavoitteena on osoittaa, että jokin $\psi \in \Sigma$ kuvaa alueen Ω bijektiivisesti kiekoksi $\mathbb{D}$.

Osoitetaan ensin, että Σ on epätyhjä. Oletuksen nojalla on olemassa luku $w_0 \notin \Omega$, $w_0 \neq \infty$. Koska Ω on yhdesti yhtenäinen, saadaan sellainen $g \in$

[4]Tällaiseksi kelpaa esimerkiksi $E = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \Omega$.

$H(\Omega)$, että $g(z)^2 = z - w_0$, $z \in \Omega$. Jos nyt $g(z_1) = g(z_2)$ joillakin $z_1 = z_2$, myös $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$ ja siis $z_1 = z_2$, minkä nojalla g on injektio. Vastaavasti seuraa, ettei ole yhtään sellaista lukuparia $z_1, z_2 \in \Omega$, että $g(z_1) = -g(z_2)$.

Avoimen kuvauksen lauseen 1.2.7 perusteella $g(\Omega)$ peittää jonkin kiekon $D(a, r)$, missä $0 < r < |a|$. Jos nyt $g(z) \in D(-a, r)$ jollakin $z \in \Omega$, seuraa ristiriita tuloksen $g(z_1) \neq -g(z_2)$, $z_1, z_2 \in \Omega$, kanssa. Näin ollen asettamalla

$$\psi_0 = \frac{r}{g + a} \in H(\Omega)$$

saadaan funktio $\psi_0 \in \Sigma$.

Olkoon nyt $\psi \in \Sigma$ sekä $z_0 \in \Omega$, ja oletetaan, ettei $\psi(\Omega)$ peitä koko kiekkoa $\mathbb{D}$. Tällöin on olemassa sellainen $\alpha \in \mathbb{D}$, että $\alpha \notin \psi(\Omega)$. Koska todetusti $\varphi_\alpha \in \Sigma$, myös $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$, ja lisäksi funktiolla $\varphi_\alpha \circ \psi$ ei selvästikään ole nollakohtaa joukossa Ω. Näin ollen saadaan jälleen sellainen $g \in H(\Omega)$, että $g^2 = p_2 \circ g = \varphi_\alpha \circ \psi$. Vastaavasti seuraa, että g on injektio ja siis että $g \in \Sigma$.

Merkitään $\beta = g(z_0)$. Tällöin saadaan kuvaus $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g \in \Sigma$, ja asettamalla $w_0 = \psi(z_0)$ seuraa edelleen

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ p_2 \circ g = \varphi_{w_0} \circ (\varphi_{-w_0} \circ \varphi_{-\alpha} \circ p_2 \circ \varphi_{-\beta}) \circ \psi_1.$$

Nyt $\psi_1(z_0) = 0$, joten ketjusääntö antaa muodon

$$\psi'(z_0) = \varphi'_{w_0}(0) F'(0) \psi'_1(z_0),$$

missä $F = \varphi_{-w_0} \circ \varphi_{-\alpha} \circ p_2 \circ \varphi_{-\beta}$, jolloin siis $F(0) = 0$. Toisaalta $F \in H(\mathbb{D})$ ja $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Lisäksi F ei ole injektio, sillä muutoin myös p_2 olisi injektio. Näin ollen Schwarzin lemma antaa tuloksen $|F'(0)| < 1$, mistä seuraten

$$|\psi'(z_0)| < |\varphi'_{w_0}(0)| \cdot 1 \cdot |\psi'_1(z_0)| \overset{(2.23)}{<} |\psi'_1(z_0)|. \tag{3.5}$$

Olkoon nyt $z_0 \in \Omega$ kiinteä, ja asetetaan

$$\eta = \sup_{\psi \in \Sigma} |\psi'(z_0)|.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen $h \in \Sigma$, että $|h'(z_0)| = \eta$. Edeltävän tarkastelun ja erityisesti tuloksen (3.5) nojalla tällainen h kuvaa kiekon $\mathbb{D}$ surjektiivisesti itselleen.

Koska $|\psi(z)| < 1$ kaikilla $\psi \in \Sigma$ ja $z \in \Omega$, Lauseesta 3.2.9 seuraa, että Σ on normaaliperhe. Luvun η määritelmä antaa sellaisen kokoelman Σ funktiojonon (ψ_n), että $\left|\psi'_n(z_0)\right| \to \eta$. Toisaalta nyt normaalius antaa osajonon (ψ_{n_j}), joka Määritelmän 3.2.6 mukaisesti suppenee tasaisesti kompakteilla osajoukoilla $K \subset \Omega$ kohti rajafunktioita $h \in H(\Omega)$. Lauseen 3.2.8 nojalla toisaalta myös $\psi'_{n_j} \to h'$, joten saadaan tulos $|h'(z_0)| = \eta$. Koska $\Sigma \neq \emptyset$, seuraa, että $\eta > 0$ ja siis h ei ole vakio. Koska taas $\psi_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, saadaan inkluusio $h(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ja avoimen kuvauksen lauseen 1.2.7 nojalla edelleen $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Riittää enää osoittaa, että h kuvaa kiekon Ω injektiivisesti kiekolle $\mathbb{D}$. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, ja asetetaan

$$\alpha = h(z_1), \quad \alpha_j = \psi_{n_j}(z_1), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Koska $h - \alpha \in H(\Omega)$, seuraa, että funktion $h - \alpha$ nollakohdilla ei ole kasautumispistettä. Täten on olemassa sellainen suljettu kiekko $\overline{D} \subset \mathbb{D}$ keskipisteenään z_2, että $z_1 \notin \overline{D}$ ja että funktiolla $h - \alpha$ ei ole nollakohtaa kiekon $\overline{D}$ reunalla.

Toisaalta $\psi_{n_j} - \alpha_j \to h - \alpha$ tasaisesti kiekossa $\overline{D}$, ja koska jokainen funktioista ψ_{n_j}, $j = 1, 2, \ldots$, on injektio, funktiolla $\psi_{n_j} - \alpha_j$ ei ole nollakohtaa kiekossa $\overline{D}$ eikä sen reunalla. Asetetaan nyt

$$\varepsilon = \min_{z \in \partial \overline{D}} \big| h(z) - \alpha \big|.$$

Tällöin $\varepsilon > 0$, ja siis tasainen suppeneminen antaa sellaisen $N \in \mathbb{N}$, että

$$\Big| \big(\psi_N(z) - \alpha_N\big) - \big(h(z) - \alpha\big) \Big| < \varepsilon \leq \big| h(z) - \alpha \big|,$$

kun $z \in \partial \overline{D}$. Nyt Rouchén lauseen 1.1.2 nojalla funktioilla $\psi_N - \alpha_N$ ja $h - \alpha$ on sama määrä nollakohtia kiekon $\overline{D}$ sisäpisteissä. Erityisesti siis $h(z_1) \neq h(z_2)$ ja edelleen $h \in \Sigma$, mistä väite nyt seuraa. [8, ss. 302 – 304] □

Todistukset eivät siis ole konstruktivistisia, sillä niissä vain osoitetaan sopivan Riemannin kuvauksen olemassaolo suppenevan osajonon raja-arvona.

3.3 Schwarz-Christoffelin kaava

Riemannin kuvauslauseen takaaman biholomorfismin eksplisiittinen löytäminen on usein hankalaa, kuten tämän alaluvun monikulmioiden rajoittamien alueiden tarkastelu osoittaa:

Olkoot tutkittavan monikulmion M kulmat pisteissä $w_1, \ldots w_n$, ja olkoot $\pi\alpha_1, \ldots, \pi\alpha_n$ näihin syntyvät kulmat. Määritellään vastaavasti ulkokulmat $\pi\mu_j$ asettamalla

$$\alpha_j + \mu_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tällöin siis kunkin sisä-ulkokulmaparin summa on tavanomaisesti π, ja monikulmio M on konveksi, jos ja vain jos $\mu_j > 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$.

Tavoitteena on konstruoida kuvaus f, joka kuvaa ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ monikulmion M sisäpuolelle konformisti ja bijektiivisesti. Koska konformi ekvivalenssi on ekvivalenssi, puolitason $\mathbb{H}$ valinta on konventionaalinen; konformikuvaus kiekolta $\mathbb{D}$ monikulmion M rajoittamalle alueelle saadaan hyödyntämällä Esimerkkiä 2.2.12. Tarkastelu perustuu nyt symmetrian kautta löydettävään invarianttiin. Työkaluna tässä käytetään tulosta, joka tunnetaan *symmetriaperiaatteena*:

Lause 3.3.1. *Olkoot D_1, $D_2 \subset \mathbb{C}$ toisiaan sivuavia alueita, joiden reunojen leikkaus muodostaa sileän käyrän α. Jos $f_1 \in H(D_1)$, $f_2 \in H(D_2)$ ja jos*

$$\lim_{\substack{z \to \alpha_0 \\ z \in D_1}} f_1(z) = \lim_{\substack{z \to \alpha_0 \\ z \in D_2}} f_2(z),$$

kaikilla $\alpha_0 \in \alpha$, niin f_1 ja f_2 ovat toistensa holomorfisia jatkeita. Toisin sanoen on siis olemassa sellainen funktio $f \in H(D \cup \alpha)$, $D = D_1 \cup D_2$, että $f|_{D_j} = f_j$, $j = 1, 2$.

Todistus. Olkoon $C \subset D$ sellainen suljettu käyrä, että $C \cap D_j \neq \emptyset$ ja että käyrä α jakaa sen kahdeksi käyräksi $C_j \subset D_j$, $j = 1, 2$. Käytetään lisäksi merkintää D_j' siitä alueesta, jonka reuna koostuu käyristä C_j ja α, $j = 1, 2$. Määritellään nyt käyrän C rajoittaman alueen D' funktio f asettamalla, että $f(z) = f_j(z)$, kun $z \in D' \cap D_j$, ja että käyrällä α arvot $f(z)$ saadaan funktioiden f_1 ja f_2 yhtenevinä raja-arvoina.

Tutkitaan integraalia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z, \tag{3.6}$$

missä $\Gamma_1 = C_1 \cup \alpha = \partial D_1'$ on kerran positiivisesti suunnistettu käyrä. Jos $z_0 \in D_1'$, Cauchyn integraalikaavan nojalla (3.6) on arvoltaan $f(z_0)$, ja vastaavasti tapauksessa $z_0 \in D_2'$ (3.6) saa arvon 0. Vastaavat tulokset seuraavat myös integraalille

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z, \tag{3.7}$$

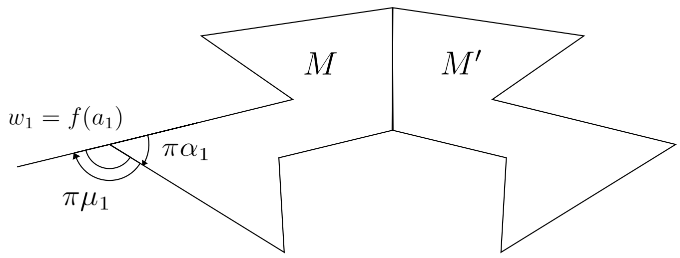
missä $\Gamma_2 = C_2 \cup \alpha = \partial D_2'$ on sekin kerran positiivisesti suunnistettu.

Toisaalta summakäyrässä $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ käyrän α osuudet kumoavat toisenssa, joten $\Gamma = C$ ja edelleen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = f(z_0), \quad z_0 \in D_1' \cup D_2'. \tag{3.8}$$

Hyödyntämällä jälleen Cauchyn integraalikaavaa seuraa nyt, että Yhtälössä (3.8) esiintyvä integraali ja siis myös f ovat molemmat holomorfisia koko käyrän C sisäpuolella eli alueessa D'. Väite seuraa. [7, s. 183] □

Huomautus. Symmetriaperiaatteen antama holomorfinen jatke on itse asiassa *yksikäsitteinen.* Jos nimittäin $f \in H(\Omega)$ ja jos g ja h ovat tämän holomorfisia jatkeita alueeseen $\Omega' \supset \Omega$, seuraa, että $\big(g - h\big)(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$. Toisin sanoen funktion $g - h$ nollakohdilla on kasautumispiste alueessa Ω, eli $g(z) \equiv h(z)$ myös alueessa Ω'.



Kuva 6: Monikulmio M ja sen eräs peilikuva M'.

Olkoon a_j nyt se reaaliakselin piste, jonka f kuvaa kärjeksi w_j, $j = 1, \ldots, n$. Pisteet $a_1, \ldots, a_n$ jakavat siis reaaliakselin n osaan, joista jokaisen f kuvaa yhdeksi monikulmion M sivuista. Jos nyt w-tasolla monikulmio M peilataan jonkin sivunsa suhteen monikulmiolle M', vastaavasti z-tasolla siirrytään alempaan puolitasoon, jolle f on holomorfisesti jatkettavissa. Toisin sanoen siis f kuvaa alemman puolitason monikulmion M' sisäpuolelle (Kuva 6). Peilaamalla kulmio M' puolestaan erään sivunsa suhteen saadaan alkuperäisen monikulmio M'', joka on alkuperäisen monikulmion M kanssa yhtenеväinen. Toisaalta z-tasolla palaudutaan takaisin ylempään puolitasoon.

Uusi w-tason piste saadaan alkuperäisestä yhdistämällä kaksi peilausta. Tulos voidaan esittää Möbius-muunnoksena yhdistämällä siirto kiertoon:

$$f_1(z) = Af(z) + B, \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad A \neq 0.$$

Derivoimalla

$$f_1'(z) = Af'(z), \tag{3.9}$$

mistä edelleen

$$f_1''(z) = Af''(z). \tag{3.10}$$

Näin ollen derivaatat (3.9) ja (3.10) yhdistämällä seuraa yhteys

$$\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Tämä on etsitty invariantti; merkitään $g = f''/f'$. On huomattavaa, että funktion g singulariteetteja voivat olla ainoastaan pisteet $a_1, \dots, a_n$.

Hyödynnetään nyt sitä, että f kuvaa pisteen a_j kulman π pisteeseen w_j kulmaksi $\pi\alpha_j$, $j = 1, \dots, n$, tutkimalla funktiota

$$h(z) = \big(f(z) - w_j\big)^{1/\alpha_j},$$

joka on ensinnäkin holomorfinen koko puolitasossa $\mathbb{H}$, sillä yhtälön $f(z) = w_j$ ainoa juuri on $z = a_j$. Toisaalta Lauseen 1.3.3 nojalla h kuvaa pisteen a_j sisältävän reaaliakselin janan edelleen janaksi, joten symmetriaperiaatteen nojalla h on holomorfinen jossakin pisteen a_j ympäristössä. Näin ollen funktiolle f saadaan esitys

$$f(z) = w_j + h(z)^{1-\mu_j}.$$

Toisaalta pätee $h(a_j) = 0$, $h'(a_j) \neq 0$, joten on olemassa sellainen pisteen a_j ympäristössä holomorfinen funktio h_1, että $h_1(a_j) \neq 0$ ja

$$h(z) = (z - a_j)h_1(z).$$

Täten

$$f(z) = w_j + (z - a_j)^{1-\mu_j} h_1(z)^{1-\mu_j}.$$

Funktiolle g saadaan siis esitys

$$g(z) = -\frac{\mu_j}{z - a_j} + k(z),$$

missä k on jokin holomorfinen funktio. Määrittelemällä nyt

$$g_1(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{z - a_j}$$

saadaan pisteiden $a_1, \dots, a_n$ ympäristössä holomorfinen funktio g_1. Tästä toisaalta seuraa, että g_1 on koko laajennetussa tasossa $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorfinen funktio, joka Lauseen 2.1.4 nojalla on vakio.

Koska f on selvästi rajoitettu koko puolitasossa $\mathbb{H}$, seuraa Lemmasta 2.1.2, että Yhtälön (2.2) mukaisella funktiolla $\widetilde{f}$ on sarjaesitys

$$\widetilde{f}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots.$$

Tämän nojalla derivaatoille saadaan

$$f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \dots, \qquad f''(z) = \frac{2c_1}{z^3} + \frac{6c_2}{z^3} + \dots,$$

joten funktion g määritelmän mukaan $g(\infty) = 0$ ja siis $g_1 \equiv 0$. Pätee

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = g(z) = g_1(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{z - a_j} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{z - a_j}. \tag{3.11}$$

Yhtäsuuruus (3.11) antaa nyt suoraan yhteyden parametrien a_j, μ_j sekä konformikuvauksen f välille.

Koska f toteuttaa konformiusehdon $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$, seuraa, että funktiolla $\log f'$ on puolitasossa $\mathbb{H}$ holomorfinen haara. Toisaalta muodon (3.11) nojalla

$$\log f'(\xi) = \int_{i}^{\xi} \left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\zeta - a_j} \right) \mathrm{d}\zeta = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j \log(\xi - a_j) + C, \tag{3.12}$$

mihin eksponenttifunktion määritelmää (3.2) käyttämällä saadaan esitys

$$f'(\xi) = e^{\log f'(\xi)} = \frac{\alpha}{(\xi - a_1)^{\mu_1}(\xi - a_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\xi - a_n)^{\mu_n}}, \tag{3.13}$$

missä $\alpha \in \mathbb{C}$ on vakio.

Koska kuvaukset $\xi \mapsto (\xi - a_j)^{-\mu_j}$ ovat kaikki holomorfisia yhdesti yhtenäisessä alueessa $\mathbb{H}$, niiden käyräintegraalit eivät riipu integrointikäyrästä. Olkoon nyt z_0 jokin reaaliakselin piste, $z_0 \neq a_1, \ldots, a_n$, ja olkoon C sellainen käyrä, että reaaliakselin ja käyrän C ainoa yhteinen piste on z_0 ja että C kulkee muuten puolitasossa $\mathbb{H}$. Nyt seuraa, että $\int_C f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$, ja näin ollen funktiolla f' on antiderivaatta $f \in H(\mathbb{H})$,

$$f(z) = \alpha \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - a_1)^{\mu_1}(\xi - a_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\xi - a_n)^{\mu_n}} + \beta. \tag{3.14}$$

Tulosta (3.14) kutsutaan *Schwarz-Christoffelin kaavaksi*. Vakiot α ja β määräytyy kuvamonikulmion M suuruuden ja paikan mukaan, sillä Möbius-muunnos $z \mapsto \alpha z + \beta$ vastaa tason kiertoa origon ympäri kulman $\arg \alpha$ verran, homotetiaa keskuksenaan origo ja tekijänään $|\alpha|$ ja siirtoa janan β verran yhdistettynä toisiinsa tässä järjestyksessä.

Se, että jokin pisteistä a_j on äärettömyyspiste ∞, ei rajoita Schwarz-Christoffelin kaavan hyödyntämistä. Muunnetaan piste a_n äärettömyyspisteeksi käyttämällä muuttujanvaihtoa $\xi = a_n - \frac{1}{w}$. Koska $\sum_j \mu_j = 2$, yhteisillä tekijöillä saadaan

$$\begin{aligned} f(w) &= \alpha \int_{w_0}^{w} \left(a_1' - \frac{1}{w} \right)^{-\mu_1} \cdot \ldots \cdot \left(a_{n-1}' - \frac{1}{w} \right)^{-\mu_{n-1}} \cdot \left(-\frac{1}{w} \right)^{-\mu_n} \frac{\mathrm{d}w}{w^2} + \beta_1 \\ &= \alpha \int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}w}{(a_1' w - 1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (a_{n-1}' w - 1)^{\mu_{n-1}}} + \beta_1, \end{aligned} \tag{3.15}$$

missä $a'_j = a_n - a_j$. Toisaalta (3.15) voidaan puolestaan saattaa kaavaa (3.14) muistuttavaan muotoon

$$f(z) = \alpha_1 \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - a''_1)^{\mu_1}(\xi - a''_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\xi - a''_{n-1})^{\mu_{n-1}}} + \beta_1,$$

jonka nojalla riittää siis jättää tekijä $(\xi - a_n)^{\mu_n}$ huomiotta. [7, ss. 189 – 192]

Esimerkki 3.3.2. Määrätään kuvaus puolitasolta $\mathbb{H}$ mielivaltaisen kolmion sisälle. Olkoot $\pi\alpha$, $\pi\beta$ ja $\pi\gamma$ kolmion sisäkulmat. Näitä sitoo tunnetusti ehto $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Voidaan olettaa, että kulmiksi kuvautuvat pisteet ovat 0, 1 ja ∞, sillä nämä voidaan kuvata miksi tahansa muiksi reaaliakselin pisteiksi Möbius-muunnoksella.

Tutkitaan kuitenkin aluksi epäoleellista integraalia

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

Olkoon $0 < x_0 < 1/2$. Jokainen kolmio on konveksi, joten $\pi\beta < \pi$ eli $\beta - 1 > 0$. Tästä seuraa puolestaan, että funktio $t \mapsto (1-t)^{\beta-1}$ on aidosti kasvava välillä $[x_0, \frac{1}{2}]$. Nyt toisaalta

$$\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-1}(1-x_0)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{(1-x_0)^{1-\beta}} \to \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2^{\alpha}},$$

kun $x_0 \to 0+$, joten integraali (3.16) suppenee integrandin epänegatiivisuuden nojalla. Vastaavalla päättelyllä voidaan osoittaa, että epäoleellinen integraali

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \tag{3.17}$$

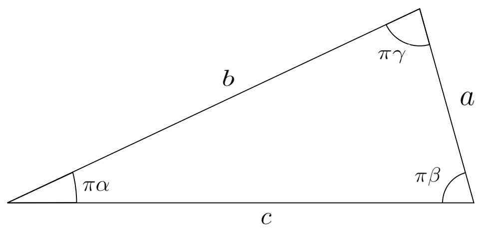
suppenee. Lisäksi integraalien (3.16) ja (3.17) summalle saadaan arvo

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

missä Γ on gammafunktio[5] [6, s. 192].

[5] *Gammafunktio* l. funktio

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$



Kuva 7: Esimerkin 3.3.2 kolmio.

Siirrytään nyt käyttämään Schwarz-Christoffelin kaavaa. Jokaisen sisä-ulkokulmaparin summa on π, joten saadaan kulmien α ja β avulla lausuttuna esitys

$$f(z) = C \int_{\frac{1}{2}}^{z} \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\xi + C'$$

ja edelleen integraalia (3.16) hyödyntämällä

$$f(z) = C \int_{0}^{z} \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\xi + C'',$$

missä C, C' ja C'' ovat kompleksisia vakioita. Voidaan olettaa, että $C = 1$ ja $C'' = 0$, sillä muut tapaukset seuraavat tästä sopivin Möbius-muunnoksin.

Kulmaa $\pi\gamma$ vastaavan sivun c pituus saadaan nyt integraalina (1.14):

$$c = \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Toisaalta Γ toteuttaa funktionaaliyhtälön

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad 0 < x < 1,$$

kuten teoksessa [6, s. 189] osoitetaan. Näin ollen yhteydestä $\alpha + \beta + \gamma = 1$ seuraa lauseke

$$c = \frac{1}{\pi}\sin(\pi\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma).$$

Nyt kulmaa $\pi\alpha$ (vast. $\pi\beta$) vastaavalle sivulle a (vast. b) pätee sinilauseen nojalla

$$\frac{a}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{b}{\sin(\pi\beta)} = \frac{c}{\sin(\pi\gamma)}.$$

Näin ollen

$$a = \frac{1}{\pi}\sin(\pi\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma), \quad b = \frac{1}{\pi}\sin(\pi\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma).$$

Kulman $\pi\alpha$ kärki on pisteessä $f(0) = 0$ ja vastaavasti kulman $\pi\beta$ reaaliakselin piste $f(1) = c$. Toisaalta yksinkertaisella trigonometrialla selviää, että kulman $\pi\gamma$ kärki on pisteessä $be^{i\pi\alpha}$. [7, ss. 194 – 195]

3.4 Renkaat

Riemannin kuvauslause 3.2.2 takaa todetusti konfromin ekvivalenssin lähes kaikkien yhdesti yhtenäisten alueiden välille. Se, että tällä ei ole vastinetta yleisesti useasti yhtenäisille alueille, ilmenee parhaiten *renkaiden* avulla. Muiden useasti yhtenäisten alueiden perusteellinen tarkastelu sivuutetaan, sillä niiden käsittely vaatii tämän tutkielman piiriin kuulumatonta harmonisten funktioiden teoriaa [1, s. 251 – 261].

Määritelmä 3.4.1. Olkoot $0 < r < R$. Tällöin *rengas*, jonka *sisäsäde* on r ja *ulkosäde* R, on alue

$$A(r, R) = \{\, z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \,\}.$$

Rengas $A(r, R)$ ei selvästikään ole yhdesti yhtenäinen, sillä siihen sisältyvät origokeskiset ympyrät eivät selvästikään ole nollahomotooppisia. Itse asiassa jokainen rengas on kahdesti yhtenäinen, kuten kuvassa 5b sivulla 42 havainnollistetaan.

Jos nyt $\lambda > 0$, homotetia $h_\lambda(z) = \lambda z$ on triviaalisti konformi ja toisaalta kuvaa renkaan $A(r, R)$ renkaaksi $A(\lambda r, \lambda R)$. Näin ollen renkaat $A(r_1, R_1)$ ja $A(r_2, R_2)$ ovat konformisti ekvivalentit, jos ehto

$$R_1/r_1 = R_2/r_2. \tag{3.18}$$

on voimassa. Käy ilmi, että (3.18) ei ole ainoastaan riittävä vaan myös välttämätön kahden renkaan konformille ekvivalenssille. [8, ss. 312 – 313]

Lause 3.4.2. *Renkaat $A(r_1, R_1)$ ja $A(r_2, R_2)$ ovat konformisti ekvivalentit, jos ja vain jos $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

Lauseen 3.4.2 mukaan renkaaseen $A(r, R)$ liittyvä luku R/r, *moduli*, määrää sen suhteen muihin renkaisiin konformiuden mielessä. Näin ollen riittää käsitellä renkaita $A(R) = A(1, R)$, $R > 1$, sillä ulkosäde riittää määräämään modulin yksikäsitteisesti sisäsäteen pysyessä vakiona. Ennen itse Lauseen 3.4.2 todistusta vaaditaan kuitenkin harmonisiin funktioihin liittyvä aputulos.

Lemma 3.4.3. *Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmoninen funktio. Jos tällöin on olemassa sellainen $z_0 \in \Omega$, että*

$$u(z_0) \geq u(z)$$

jossakin pisteen z_0 ympäristössä eli että z_0 on funktion u lokaali maksimi, $z \neq z_0$, niin u on välttämättä vakio. [7, ss. 9 – 10]

Todistus. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että alue Ω on niin pieni, että z_0 on funktion u globaali maksimi ja että Cauchy-Riemannin yhtälöt antavat sellaisen $f \in H(\Omega)$, että $\Re(f) = u$.

Oletetaan nyt, ettei f ole vakio. Avoimen kuvauksen lauseen 1.2.7 nojalla $f(\Omega)$ ja siten myös $u(\Omega)$ on avoin. Näin ollen on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\big]u(z_0) - \delta, u(z_0) + \delta\big[\subset u(\Omega).$$

Siis u saa arvon $u(z_0) + \delta/2 > u(z_0)$ alueessa Ω, mikä johtaa ristiriitaan oletuksen kanssa.

Toisaalta nyt f on vakio kaikissa niissä alueen Ω sisältävissä komponenteissa, joissa se on holomorfinen. Täten u on vakiofunktion reaaliosana edelleen vakio näissä komponenteissa, mistä siis yleinen väite seuraa. $\square$

Erityisesti Lemmaa 3.4.3 hyödyntämällä seuraa, että harmoninen funktio voi saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa vain tutkittavan alueen reunalla.

Edetään todistamaan Lause 3.4.2.

Todistus. Olkoon $f : A(R_1) \to A(R_2)$ konformi bijektio, merkitään

$$\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1},$$

ja asetetaan

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^\alpha}.$$

Tällöin oletusten nojalla seuraa, että $F \in H\big(A(R_1)\big)$. Toisaalta funktiolla f ei ole nollakohtia renkaassa $A(R_1)$, joten koska

$$f'(z) = \alpha z^{\alpha - 1} F(z) + z^\alpha F'(z),$$

seuraa, että

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z}, \quad z \in A(R_1).$$

Tutkitaan aluksi funktiota $u(z) = \log|z|^2$, $|z| > 0$. Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

mistä edelleen seuraa, että

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{3.19}$$

Toisaalta vastaavasti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \tag{3.20}$$

joten yhdistämällä nyt derivaatat (3.19) ja (3.20) saadaan tulos

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,$$

eli toisin sanoen u on harmoninen erityisesti renkaassa $A(R_1)$. Toisaalta nyt nabla-operaattorin ∇ lineaarisuudesta ja Lauseesta 1.3.7 seuraa, että edelleen funktio

$$G(z) = \log|f(z)|^2 - \alpha \log|z|^2 = \log|F(z)|^2$$

on harmoninen alueessa $A(R_1)$.

Osoitetaan nyt, että $|f(z)| \to R_2$, kun $|z| \to R_1$. Olkoon K origokeskinen $\sqrt{R_2}$-säteinen ympyrä. Tällöin K on suljettuna ja rajoitettuna kompakti, ja koska käänteisfunktio $f^{-1} : A(R_2) \to A(R_1)$ on holomorfisena myös jatkuva, seuraa, että $f^{-1}(K)$ on kompakti. Näin ollen

$$A(1, 1+\varepsilon) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$$

jollakin $\varepsilon > 0$.

Määrittelemällä $V = f\big(A(1, 1+\varepsilon)\big)$ saadaan renkaan $A(R_2)$ yhtenäinen osajoukko, joka ei leikkaa ympyrää K. Seurauksena joko $V \subset A(1, \sqrt{R_2})$ tai $V \subset A(\sqrt{R_2}, R_1)$. Jälkimmäinen tapaus voidaan palauttaa ensimmäiseen tarkastelemalla funktiota R_2/f, joten voidaan olettaa, että $V \subset A(1, \sqrt{R_2})$.

Olkoon nyt (z_n) jono renkaan $A(1, 1+\varepsilon)$ pisteitä, joille $|z_n| \to 1$. Tällöin $f(z_n) \in V \subset A(1, \sqrt{R_2})$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Lisäksi jonolla $\big(f(z_n)\big)$ ei voi olla kasautumisarvoa renkaassa $A(R_2)$, sillä koska käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva, tästä seuraisi, että jonolla $\big(f^{-1}(f(z_n))\big) = (z_n)$ olisi kasautumisarvo renkaassa $A(R_1)$, mikä puolestaan johtaisi ristiriitaan oletuksen $|z_n| \to 1$

kanssa. Välttämättömänä seurauksena $|f(z_n)| \to 1$, joten vastaavalla päättelyllä $|f(z_n)| \to R_2$, kun $|z_n| \to R_1$.

Seuraa siis, että G on jatkettavissa jatkuvasti koko suljetulle renkaalle $\overline{A(R_1)}$. Nyt harmoninen funktio G häviää siis alueen $A(R_1)$ reunoilla eli kummallakin ympyröistä $|z| = 1$ ja $|z| = R_1$. Tämä yhdistettynä Lemmaan 3.4.3 antaa tulokset

$$\sup_{z \in A(R_1)} u(z) = 0, \qquad \inf_{z \in A(R_1)} u(z) = 0$$

ja näin ollen redusoi sen vakioksi ja erityisesti nollaksi. Tästä seuraa edelleen maksimiperiaatteen nojalla, että myös $F(z) \equiv \lambda$ on jollakin vakiolla λ, $|\lambda| = 1$. Jos nyt C on origokeskinen $\sqrt{R_1}$-säteinen ympyrä, niin $C \subset A(R_1)$, ja

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(z)}{F(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha}{z} \mathrm{d}z.$$

Muuttujanvaihtoa $w = f(z)$, $C' = f(C)$ hyödyntäen saadaan siis yhtäsuuruus

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{Ind}_{C'}(0),$$

eli toisin sanoen α on kokonaisluku. Koska F on vakio, funktiolle f saadaan muoto

$$f(z) = F(z) z^\alpha = \lambda z^\alpha, \quad z \in A(R_1).$$

Toisaalta bijektiivisyysoletuksen nojalla välttämättä $\alpha = 1$, eli toisin sanoen $R_1 = R_2$. Väite seuraa. $\square$

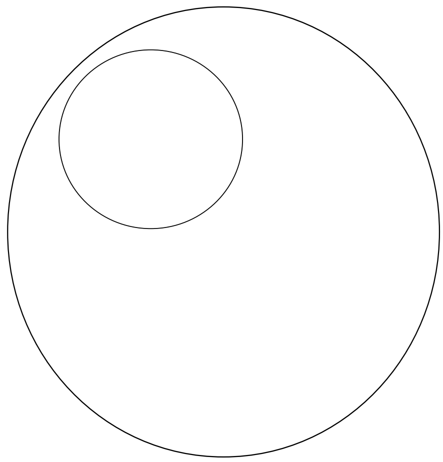
Lauseen 3.4.2 todistuksen nojalla siis itse asiassa kaikki konformit bijektiot renkaiden välillä ovat yhdistettyjä siirtoja ja homotetioita.

Esimerkki 3.4.4. Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$, ja määritellään alue $\Omega(z_0, r)$ asettamalla

$$\Omega(z_0, r) = \{\, z \in \mathbb{D} : |z - z_0| > r \,\}, \quad 0 < r < 1 - |z_0|. \tag{3.21}$$

Toisin sanoen $\Omega(z_0, r)$ on yksikköympyrä poislukien kiekko $|z - z_0| \leq r$, kuten kuvassa 8. Määritetään tämän moduli selvittämällä ekvivalentti rengas $A(R, 1)$. Lauseen 2.3.2 nojalla voidaan oikeutetusti rajoittua tutkimaan funktioita

$$\varphi_{z_0, \theta}(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}.$$



Kuva 8: Useasti yhtenäinen alue $\Omega(z_0, r)$.

Koska $\varphi_{z_0,\theta}$ on Möbius, se kuvaa selvästi ympyrän $|z - z_0| = r$ joksikin w-tason origokeskiseksi ympyräksi. Vaaditaan, että tämä on $|w| = R$. Toisaalta ehdon $|z - z_0| = r$ vallitessa

$$|w| = \left|\varphi_{z_0,\theta}(z)\right| = \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right| = \frac{r}{\left|1 - \overline{z}_0 z\right|}. \tag{3.22}$$

Sijoittamalla parametrisaatio $z(t) = z_0 + re^{it}$ sekä polaarimuoto $z_0 = |z_0|e^{i\phi}$ saadaan

$$1 - \overline{z}_0(z_0 + re^{it}) = 1 - r|z_0|e^{i\phi+it} - |z_0|^2$$

Koska (3.22) ei riipu pisteen z eikä siis parametrin t valinnasta, voidaan asettaa $t = -\phi$. Tällöin

$$|w| = \frac{r}{\left|1 - r|z_0| - |z_0|^2\right|} = \frac{r}{1 - r|z_0| - |z_0|^2},$$

ja täten alueiden $\Omega(z_0, r)$ ja $A(R, 1)$ konformista ekvivalenssista seuraa modulille

$$\frac{1}{R} = \frac{1 - r|z_0| - |z_0|^2}{r}. \tag{3.23}$$

On mahdollista selvittää ainoastaan lukua (3.23) tarkastelemalla, mitkä tyypin (3.21) alueet ovat keskenään ekvivalentteja. Konformityyppi ei selvästikään muutu, kun aluetta kierretään origon ympäri, sillä tämä ei vaikuta parametriin $|z_0|$. Toisaalta yhtälöstä

$$\frac{1 - r|z_0| - |z_0|^2}{r} = \frac{1 - r'|z_0'| + |z_0'|^2}{r'}$$

seuraa, että ekvivalenssi ei säily, mikäli modulissa (3.23) muokataan vain jompaa kumpaa luvuista r ja $|z_0|$. Vastaavasti annetuille keskipisteille z_0, z_0' ja säteelle r on ratkaistavissa

$$r' = \frac{r\big(1 - |z_0'|^2\big)}{1 - |z_0|^2 - r\big(|z_0| - |z_0'|\big)},$$

joka tapauksessa $|z_0| = |z_0'|$ redusoituu yhtälöön $r = r'$.

On lisäksi huomattavaa, että jokainen alue, joka saadaan poistamalla kiekosta toinen kiekko, saadaan kuvattua Möbius-muunnoksella eli konformilla bijektiolla jollekin tyypin (3.21) alueelle. Tulokset yleistyvät siis myös näille.

Viitteet

[1] Ahlfors, L., *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1979.

[2] Duren, P., Bollobas, B., Fulton, W., *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, West Nyack, NY, USA, 2004.

[3] Korhonen, H., *Matematiikan historian henkilöhahmoja*, MFKA-Kustannus Oy, Lahti, 1995.

[4] Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T., *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY Oppimateriaalit, Helsinki, 2007.

[5] Lehto, O., *Funktioteoria I – II*, Limes ry, Helsinki, 1980.

[6] Moll, V. H., Boros, G., *Irresistible Integrals : Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals*, Cambridge University Press, West Nyack, NY, USA, 2004.

[7] Nehari, Z., *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc., 1952.

[8] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Inc., New Delhi, 1983.

[9] Stepanov, G. Y., *Nikolai Yegorovich Zhukovskii: On the 150th anniversary of his birth*, J. Appl. Maths Mechs, 61 (1997), ss. 1 – 8.