Sudokun matematiikkaa

Pro Gradu -tutkielma
Marjo Silventoinen
175843
Itä-Suomen yliopisto
30. elokuuta 2012

Sisältö

1 Johdanto

Sudoku on vanha looginen päättelypeli, joka on noussut kymmenen vuoden sisällä suureen suosioon. Sudokua mainostetaan älykkyystestinä, johon ei tarvita matemaattista osaamista. Sudokun takana piilee kuitenkin useampi matemaattinen teoria. Matematiikan avulla voidaan selvittää, kuinka monta eri sudokuruudukkoa ylipäänsä on olemassa. Voidaan selvittää, kuinka monta lukua alkutilanteessa on annettava, ja miten ne on sijoiteltava, jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu.

Neliönmuotoinen sudokuruudukko muodostuu yleensä 81 ruudusta ja se on jaettu yhdeksään yhdeksän ruudun laatikkoon. Jokaiselle riville ja sarakkeelle tulee saada luvut $1, 2, ..., 9$. Myös jokaiseen laatikkoon tulee saada samat luvut, eikä mikään luku saa yhdellä rivillä, sarakkeella tai alaruudukossa olla kahta kertaa.

Matematiikassa pyritään aina hankkimaan varma totuus asiasta. Toisin on fysiikassa, jossa usein tyydytään myöhemmin paranneltavaan malliin. Myös sudokussa todistetaan. Tyhjään ruutuun sijoitetaan jokin luku, ja pohditaan, mitä tämän luvun sijoittamisesta seuraisi. Tämä on esimerkki epäsuorasta todistuksesta. Sudokun pystyy ratkaisemaan kynän ja paperin avulla, toisin kuin monet muut matemaattiset ongelmat, joiden ratkaisemiseen tarvitaan tietokoneen apua.[13]

Sudokun voi ratkaista usealla eri tavalla. Ensin skannataan läpi kaikki ilmiselvät tapaukset ja täydennetään varmat numerot tyhjiin ruutuihin. Tämän jälkeen merkitään jokaiseen tyhjään ruutuun ne numerot, jotka mahdollisesti voisivat sijaita juuri siinä ruudussa. Kun nämä alkuvaiheet on suoritettu, edetään sillä hetkellä käytettävän algoritmin osoittamalla tavalla.

Sudokun historia ylettyy aina 1700-luvulle asti matematiikan moniosaajaan Leonhard Euleriin. Sveitsiläinen Euler (1707-1783) kehitti kuolinvuotenaan Latinalaiset neliöt, joista sudokut ovat erikoistapaus. Latinalaisissa neliöissä tulee saada jokaiseen riviin ja sarakkeeseen luvut $1, 2, ..., n$ täsmälleen kerran. Latinalaisia neliöitä, kuten sudokujakin, käytetään normaalissa elämässä muun muassa suunnittelussa ja aikatauluttamisessa. Sudokun matematiikan pohjalla olevaa graafiteoriaa käytetään esimerkiksi optimoinnissa ja sen sovellukset taloudessa ovat merkittäviä.[2][9]

Latinalaiset neliöt inspiroivat amerikkalaista Howard Garnesia lisäämään vielä säännön, että myös jokaisessa laatikossa tulee esiintyä luvut $1, 2, ..., n$

täsmälleen kerran. Ensimmäinen sudoku julkaistiin Dell Magazines lehdessä vuonna 1979 nimellä Number Place, "Numeron paikka". Sudokun nimi on kuitenkin peräisin Japanista. Vuonna 1984 Nikoli -yritys julkaisi sudokun nimellä Suuji wa dokushin ni kagiru, "Eristä numerot". Myöhemmin tämä lyhennettiin Su Dokuksi. Su tarkoittaa numeroa ja Doku tarkoittaa ainoaa. Nikolin sudokut herättivät mielenkiintoa, sillä niissä annettiin alussa korkeintaan 32 vihjettä ja vihjeet oli sijoiteltu symmetrisesti. Sudokut nousivat suureen suosioon 2000-luvulla, kun uusi-seelantilainen Wayne Gould kehitti tietokoneohjelman, jolla voidaan luoda sudokuja nopeasti. Hänen toimesta sudokuja alettiin julkaista The Times -lehdessä vuonna 2004.[19]

Suomessa sudokuja alettiin julkaista Helsingin Sanomissa vuonna 2005. Suomi on myös kansainvälisesti tunnettu sudokumaailmassa, sillä espoolainen sovelletun matematiikan tohtori Arto Inkala kehittää maailman vaikeimpia sudokuja. Inkala kehittää sudokunsa tietokoneen avulla. Tietokonetta tarvitaankin myös esimerkiksi laskemaan sudokujen lukumäärää.[17]

2 Tausta

Tässä osassa käydään läpi sellaista matemaattista teoriaa, jota tarvitaan sudokun takana olevan matematiikan ymmärtämiseksi. Kappale 2.2 tukee erityisesti Kappaletta 4.

2.1 Latinalainen neliö

Latinalaiset neliöt ovat samanlaisia neliönmuotoisia ruudukkoja kuin sudokutkin. Säännöt ovat muuten samat, mutta Latinalaisen neliön ruudukkoa ei ole jaettu enää alaruudukoihin. Määritellään seuraavaksi Latinalaisen neliön aste ja koko.

Määritelmä 2.1. Latinalaisen neliön *aste* on n, $n \in N$, ja sen *koko* on $n^2 \times n^2$.

Latinalaisessa neliössä tulee saada kuhunkin riviin ja sarakkeeseen jokainen joukon $\{1, 2, ..., n^2\}$ alkioista.

Kappaleissa 5.2 ja 5.3 lasketaan sudokujen lukumäärää. Lukumäärä on selvästi pienempi kuin Latinalaisten neliöiden, joka jo itsessään on monimutkaista laskea.

Määritelmä 2.2. Astetta n olevien Latinalaisten neliöiden lukumäärää merkitään L_n.

Lause 2.3. *Latinalaisten neliöiden lukumäärä on alhaalta rajoitettu,*

$$L_n \geq n^{2n^4} e^{-2n^4+O(n^2 \log n)}.$$

Todistus. Todistus löytyy artikkelista [9, s.714]. $\square$

Huomautus 2.4. Lauseen 2.3 todistuksessa käytetään Stirlingin kaavaa

$$\log n! = n \log n - n + O(\log(n)).$$

2.2 Graafiteoriaa

Graafiteoria (tai verkkoteoria) on käytännön läheinen matematiikan ala. Useita tilanteita voidaan esittää graafin avulla.

Määritelmä 2.5. *Graafi* G muodostuu *solmujen* joukosta V ja *välien* joukosta E. Jokainen väli yhdistää kaksi solmua.

Yleisimmin solmuja kuvataan pisteillä ja välejä kaarilla. Yhteen solmuun voi liittyä useampia välejä.

Määritelmä 2.6. Olkoon v graafin G solmu. Tällöin välien lukumäärää, jotka liittyvät solmuun v, kutsutaan solmun v *asteeksi* ja sitä merkitään $grad\ v$.[11, s. 121]

Määritelmä 2.7. Graafi G on *säännöllinen*, jos jokaisen solmun aste on sama.[8, s.16]

Graafia voidaan kutistaa ottamalla pois välejä tai solmuja. Näin saadaan alkuperäisen graafin aligraafeja, joissa on mukana osa (tai kaikki) alkuperäisen graafin solmuista ja väleistä.

Määritelmä 2.8. Olkoon e graafin G väli. Graafin G aligraafia, josta on otettu väli e pois, merkitään $G - e$. Aligraafin $G - e$ välien joukko on näin ollen $E_{G-e} = E_G - \{e\}$ ja solmujen joukko $V_{G-e} = V_G$, missä joukot E_G ja V_G ovat graafin G välien ja solmujen joukot.[8, s.80]

Määritelmä 2.9. Olkoon e graafin G väli. *Verkon G kontraktio välillä e* on graafin G aligraafi, josta on otettu pois väli e sekä molemmat väliin e liittyvät solmut, ja sitä merkitään G/e.

Yleisesti graafin G aligraafeja G' kutsutaan kontraktioiksi, kun Määritelmän 2.9 mukaisesti otetaan pois välejä ja niihin liittyviä solmuja.

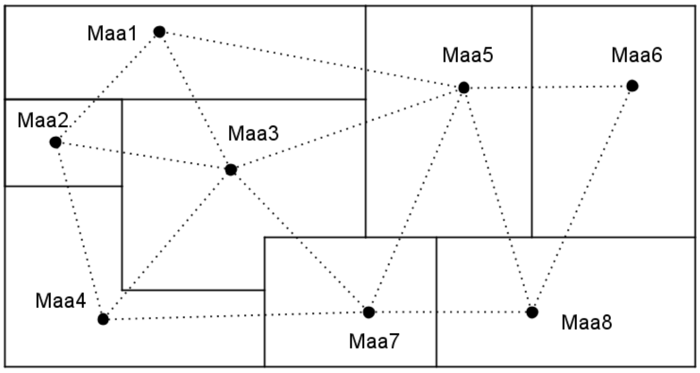
Graafi piirretään usein vaakatasoon. Tällöin on mahdollista, että välit leikkaavat toisiaan, jos solmuihin liittyy useita eri välejä.

Määritelmä 2.10. *Tasograafi* on graafi, joka voidaan piirtää tasoon siten, että välit eivät leikkaa toisiaan.[11, s.123]

Yksinkertaisin tapa muodostaa tasograafi on sallia välejä vain vierekkäisten solmujen välille. Esimerkiksi tasokartoista saadaan tasograafeja, kun valtiot ajatellaan solmuiksi. Kun valtioilla on yhteinen raja, merkitään niiden välille väli. Tilannetta voidaan kuvata tasograafilla tai normaalilla kartalla, jossa siis valtiot ovat alueita ja tasograafin solmuja.

Esimerkki 2.11. Kuvassa 1 kartta on esitetty tasograafina. Kartassa on 8 valtiota ja sitä kuvaavassa tasograafissa siis 8 solmua. Esimerkiksi Maa1 ja Maa5 ovat naapurivaltioita, joten niiden välille piirretään väli. Kuvassa välejä merkitään katkoviivalla.

Määritelmä 2.12. Olkoot $u, v \in V$ graafin G solmuja. Solmut u ja v ovat *viereisiä*, jos niiden välillä on väli $e \in E$. Merkitään väliä $e = uv$.[8, s.7]



Kuva 1: Tasokartta tasograafina

Kuuluisa ongelma on vanha neljän värin ongelma vuodelta 1852. Kysymys on, voidaanko tasokartta värittää korkeintaan neljää väriä käyttäen siten, että vierekkäiset alueet väritetään aina eri värillä. Yleisessä tapauksessa ongelmana siis on, kuinka monta väriä tarvitaan graafin solmujen värittämiseksi siten, että viereisillä solmuilla on eri värit. Neljän värin ongelmaa yritettiin todistaa yli sadan vuoden ajan, kunnes vuonna 1976 siihen löydettiin tietokoneavusteinen todistus, jossa käytiin läpi kaikki mahdolliset tapaukset sijoitella alueita tasoon. Matemaattisesti on pystytty todistamaan vain, että viisi väriä riittää värittämään tasokartan siten, että vierekkäisille alueille tulee eri värit.[11]

Määritelmä 2.13. Graafin G *kromaattinen luku* on pienin lukumäärä värejä, joita tarvitaan graafin G solmujen värittämiseksi siten, että viereiset solmut väritetään eri väreillä. Kromaattista lukua merkitään $\chi(G)$.

Jos kaksi solmua on yhdistetty välillä, tulee ne siis värittää eri värillä. Sudokun ratkaisu vastaa värittämisongelmaa. Tähän palataan Kappaleessa 4.

3 Sudokun terminologiaa

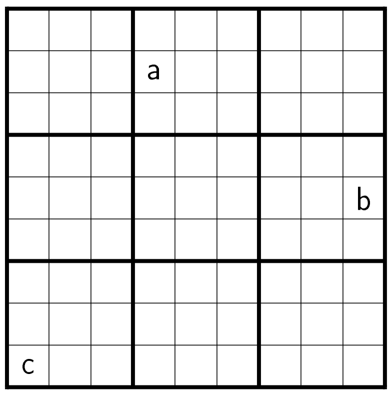
Normaali sudoku on neliönmuotoinen ruudukko, jossa on 81 ruutua. Kuhunkin riviin ja sarakkeeseen tulee saada luvut $1, 2, ..., 9$. Sudoku on jaettu vielä yhdeksään yhdeksän ruudun alaruudukkoon, joihin tulee myös saada samat yhdeksän eri lukua. Tämän säännön takia sudoku on Latinalaisen neliön erikoistapaus ja sudokujen joukko onkin Latinalaisten neliöiden joukon osajoukko. Määritelmä 2.1 pätee siis myös sudokuille. Normaalin 81 ruutuisen sudokun aste on 3 ja sen koko on $3^2 \times 3^2$ eli 9×9. Useasti näkee myös sudokuja, joiden koko on 4×4 tai 16×16, katso Kappale 7.3.

Rivit ja sarakkeet numeroidaan yleensä vasemmasta yläkulmasta lähtien numeroilla $1, 2, ..., 9$, jolloin niihin on helpompi viitata. Ruutuihin viitataan rivien ja sarakkeiden avulla.

Määritelmä 3.1. Sudokuruudukon yhtä ruutua kutsutaan *soluksi* tai *solmuksi*. Rivillä i ja sarakkeessa j sijaitsevaa solua merkitään $c(i, j)$. [5],[9]

Yleisimmin käytetään nimitystä solu. Graafiteorian yhteydessä käytetään nimitystä solmu, sillä se kuvaa tilannetta hyvin.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan Kuvan 2 sudokua, johon on merkitty kolme solua a, b ja c. Rivillä 2 ja sarakkeessa 4 sijaitsevaa solua merkitään $a = c(2, 4)$. Rivillä 5 ja sarakkeessa 9 sijaitsevaa solua merkitään $b = c(5, 9)$. Rivillä 9 ja sarakkeessa 1 sijaitsevaa solua merkitään $c = c(9, 1)$.



Kuva 2: Sudokun solut a, b ja c

Määritelmän 2.1 mukaan astetta n olevan sudokun koko on $n^2 \times n^2$. Sudokulla on n^2 kappaletta rivejä ja sarakkeita ja myös n^2 kappaletta alaruudukoita. Määritellään seuraavaksi, mitä alaruudukot ovat.

Määritelmä 3.3. Neliönmuotoisesta, astetta n olevasta ruudukosta erotetaan n^2 kappaletta kokoa $n \times n$ olevia alaruudukoita, jotka eivät saa leikata toisiaan. Näitä alaruudukoita kutsutaan *laatikoiksi.*

Astetta 3 olevassa 9×9 sudokussa on siis 9 laatikkoa, joiden kunkin koko on 3×3. Laatikot voidaan numeroida vasemmasta yläkulmasta lähtien $L1, L2, ..., L9$, kuten Kuvan 3 sudokussa.[7]

	L	1		L	2		L	3
	L	4		L	5		L	6
	L	7		L	8		L	9

Kuva 3: Sudokun laatikot

Sudokusta voidaan erottaa erilaisia rivien ja sarakkeiden joukkoja. Joukkoja muodostavat muun muassa rivit $1, 2$ ja 3, siis kolme ylimmäistä laatikkoa. Muita rivien joukkoja muodostavat keskimmäiset kolme riviä ja myös alimmaiset kolme riviä. Samalla tavalla muodostetaan sarakkeiden joukkoja.

Määritelmä 3.4. Kolmen vierekkäisen laatikon muodostamaa joukkoa kutsutaan *nipuksi* (eng. band) ja kolmen alekkaisen laatikon muodostamaa joukkoa kutsutaan *pinoksi* (eng. stack).

Astetta 3 olevassa sudokussa on kolme nippua ja kolme pinoa. Laatikot $L1$, $L4$ ja $L7$ muodostavat ensimmäinen pinon, laatikot $L2$, $L5$ ja $L8$ muodostavat toisen pinon, ja laatikot $L3$, $L6$ ja $L9$ muodostavat kolmannen pinon.

Alkutilanteessa sudokussa on 81 solua, joista osa on tyhjiä. Osassa tulee sijaita valmiiksi jokin yhdeksästä luvusta, jotta sudoku voidaan ratkaista. Alkutilanteen ehtoihin palataan Kappaleessa 4.2. Soluihin sijoitetaan lukuja sääntöjen mukaisesti. Ratkaisun tietyssä vaiheessa ei välttämättä olla vielä varmoja, mikä luku soluun tulee sijoittaa, ja siksi onkin useampi vaihtoehto.

Määritelmä 3.5. Alkutilanteessa soluihin valmiiksi sijoitettuja lukuja kutsutaan *vihjeiksi.*

Määritelmä 3.6. Soluun varmasti tuleva luku on *pakollinen luku.* Pakolliset luvut saadaan sudokun sääntöjen mukaisesti. Jos pakollista lukua ei tiedetä, on solulla kaksi tai useampia *kandidaatteja.*

Esimerkki 3.7. Kuvan 4 sudokussa on alkutilanteessa annettu 23 vihjettä. Pakollisia lukuja löytyy kaksi kappaletta. Ensimmäinen näistä on $c(2,3) = 1$, sillä lukua 1 ei laatikkoon $L1$ pysty sijoittamaan mihinkään muuhun soluun. Toinen pakollinen luku on $c(2,6) = 9$. Muissa soluissa on useampia kandidaatteja. Esimerkiksi solun $c(1,7)$ kandidaatteja ovat luvut 1 ja 6.

	3	9	5					
			8				7	
				1		9		4
1			4					3
		7				8	6	
		6	7		8	2		
	1			9				5
					1			8

Kuva 4: Esimerkin 3.7 sudoku,[5, s.463]

Laatikon sisällä olevat rivit ja sarakkeet voidaan nimetä. Koko sudokun diagonaalit kulkevat laatikon $L1$ vasemmasta yläkulmasta laatikon $L9$ oikeaan alakulmaan ja laatikon $L3$ oikeasta yläkulmasta laatikon $L7$ vasempaan alakulmaan. Myös jokaisella laatikolla on omat diagonaalinsa.

Määritelmä 3.8. Laatikon Li, $i = 1, 2, ..., 9$, rivejä kutsutaan *miniriveiksi* ja sarakkeita *minisarakkeiksi.* Diagonaaleja kutsutaan *minidiagonaaleiksi.*

4 Sudokun solmujen värittäminen

Sudokua voidaan tarkastella graafina, jonka solmuja voidaan värittää, kuten Kappaleessa 2.2. Kromaattisen polynomin avulla määritellään sudokun ratkaisun yksikäsitteisyys.

4.1 Kromaattiset polynomit

Muotoillaan Kappaleessa 2.2 esiintynyt solmujen väritys tarkemmin ja tutustaan siihen, kuinka monella eri tavalla graafin G solmut voidaan värittää. Oletetaan, että käytössä on λ kappaletta eri värejä, joilla solmut tulee värittää.

Määritelmä 4.1. Olkoon V graafin G solmujen joukko ja olkoon joukko $\{1, 2, ..., \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, käytössä olevien värien joukko. Funktiota $f : V \to \{1, 2, ..., \lambda\}$ kutsutaan graafin G λ-*värityksesksi*.[9]

Jotta viereisillä solmuilla olisi eri värit, voidaan käyttää niin montaa eri väriä kuin on solmujakin. Tällöin funktio f olisi bijektio. Väritysongelmassa ei kuitenkaan ole mielekästä tutkia funktiota, joka on injektio, joten keskitytään äärelliseen määrään värejä. Funktion f ei tarvitse edes olla surjektio, sillä kaikkia joukon $\{1, 2, ..., \lambda\}$ värejä ei välttämättä tarvitse käyttää.

Määritellään seuraavaksi graafin G osittainen ja kunnollinen väritys. Olkoon $|V|$ graafin G solmujen lukumäärä.

Määritelmä 4.2. Olkoon graafin G joukon V solmuja väritetty t kappaletta, $t \leq |V|$. Tätä väritystä kutsutaan *osittaiseksi väritykseksi* ja sitä merkitään C.

Kun osa solmuista on väritetty, voidaan tämä osittainen väritys täydentää kunnolliseksi väritykseksi.

Määritelmä 4.3. Graafin G *kunnollisessa värityksessä* kaikki solmut on väritetty siten, että $f(u) \neq f(v)$, kun solmut u ja v ovat viereisiä, eli on olemassa väli $e = uv$.[3, s.148]

Kunnollinen väritys tarkoittaa siis juuri sitä, että viereiset solmut väritetään eri väreillä. Olettamuksena on, että myös osittaisessa värityksessä tämä ehto toteutuu.

Pienin lukumäärä värejä, joita tarvitaan, että saadaan graafin G kunnollinen väritys, on kromaattinen luku $\chi(G)$, katso Määritelmä 2.13. Jos $\chi(G) = \lambda$, niin on olemassa graafin G λ-väritys, mutta ei olemassa graafin G $\lambda - 1$-väritystä, sillä $\lambda - 1$ kappaletta värejä ei riitä saamaan graafin G kunnollista väritystä. Yleisesti jos graafilla G on olemassa λ-väritys, niin $\chi(G) \leq \lambda$.[3]

Määritellään seuraavaksi tapojen lukumäärä, joilla graafin G kunnollinen väritys saadaan.

Määritelmä 4.4. Olkoon käytössä värien joukko $\{1, 2, ..., \lambda\}$. Olkoon tapojen lukumäärä, joilla saadaan graafin G kunnollinen väritys, värien lukumäärän λ funktio. Merkitään tätä funktiota $P_G(\lambda)$.

Lause 4.5. *Funktio $P_G(\lambda)$ on polynomi.*

Todistus. Olkoon graafin G solmujen lukumäärä m, siis $m = |V|$. Kun graafia G väritetään kunnolliseksi väritykseksi, voidaan ensimmäinen solmu värittää λ:lla tavalla. Toinen solmu voidaan värittää $(\lambda - 1)$:lla tavalla. Edelleen viimeinen solmu voidaan värittää $(\lambda - m + 1)$:lla tavalla. Siis tapojen lukumäärä, joilla saadaan graafin G kunnollinen väritys, on

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - m + 1),$$

mikä on selvästi polynomi. □

Polynomia $P_G(\lambda)$ kutsutaan graafin G *kromaattiseksi polynomiksi*. Kromaattinen (eng. chromatic) tarkoittaa väreihin liittyvää. Kromaattinen polynomi on siis tapojen lukumäärä, joilla saadaan graafin kunnollinen väritys.

Esimerkki 4.6. Jokaiselle tasokartalle kromaattinen polynomi $P_G(4) > 0$, sillä jokainen tasokartta voidaan värittää käyttäen neljää väriä.[3, s.211]

Graafin G kromaattisen polynomin $P_G(\lambda)$ arvo riippuu värien lukumäärästä λ ja graafin G solmujen lukumäärästä. Kromaattisen polynomin arvoa voidaan laskea poistamalla välejä ja solmuja ja liittämällä yhteen solmuja, jotka on väritetty samalla värillä. Graafin G kromaattisen polynomin $P_G(\lambda)$ aste on sama kuin graafin G solmujen lukumäärä.

Lause 4.7. *Kromaattisen polynomin $P_G(\lambda)$ aste on $m = |V|$.*

Todistus. Koska

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - m + 1) = \lambda^{(m)},$$

niin kromaattisen polynomin aste on m.[3, s.212] □

Jos osa solmuista on jo väritetty, on kromaattisen polynomin aste värittämättä olevien solmujen lukumäärä.

Lause 4.8. *Olkoon G äärellinen graafi, jossa on $|V|$ solmua. Olkoon C graafin G osittainen väritys, jossa on väritetty t solmua ja käytetty d_0 väriä. Olkoon $P_{G,C}(\lambda)$ tapojen lukumäärä, joilla saadaan osittainen väritys C täydennettyä kunnolliseksi väritykseksi käyttäen λ eri väriä. Tällöin $P_{G,C}(\lambda)$ on kromaattinen polynomi, jonka aste on $|V| - t$, kun $\lambda \geq d_0$.*

Todistus. Lause 4.8 voidaan todistaa kahdella tavalla. Toisessa todistuksessa hyödynnetään osittain järjestettyjä joukkoja ja Möbius-funktiota ja se löytyy lähteestä [9, s.710]. Tässä esitellään induktiotodistukseen pohjautuva todistus. Käydään läpi kolme eri tapausta.

(1) Olkoon e graafin G väli, joka yhdistää kaksi solmua, joista korkeintaan toinen on osittaisessa värityksessä C. Määritelmien 2.8 ja 2.9 mukaisesti olkoon olemassa graafit $G - e$ ja G/e. Tällöin

$$P_{G,C}(\lambda) = P_{G-e,C}(\lambda) - P_{G/e,C}(\lambda),$$

sillä jokainen graafin G kunnollinen väritys on myös graafin $G-e$ kunnollinen väritys ja graafin $G - e$ kunnollinen väritys on myös graafin G kunnollinen väritys, jos ja vain jos väliin e liittyvät solmut x ja y on väritetty eri väreillä. Nyt tapojen lukumäärä $P_{G,C}(\lambda)$, joilla saadaan osittainen väritys C täydennettyä kunnolliseksi väritykseksi, saadaan vähentämällä lukumäärästä $P_{G-e,C}(\lambda)$ ne väritykset, joissa solmut x ja y on väritetty samalla värillä, eli lukumäärä $P_{G/e,C}(\lambda)$. Molemmissa graafeissa $G - e$ ja G/e on vähemmän välejä kuin alkuperäisessä graafissa G.

(2) Oletetaan, että graafilla G on yksi solmu v_0, joka ei ole osittaisessa värityksessä C. Jos solmu v_0 ei ole viereinen minkään värityksen C solmun kanssa, niin tällöin graafi G on osittaisen värityksen C ja solmun v_0 yhdiste, siis $G = C \cap v_0$. Nyt solmu v_0 voidaan värittää millä tahansa λ väristä. Tässä tapauksessa siis tapojen lukumäärä, joilla saadaan osittainen väritys C täydennettyä kunnolliseksi väritykseksi, $P_{G,C}(\lambda) = \lambda$.

Jos solmu v_0 on viereinen osittaisen värityksen C d solmun kanssa ja nämä solmut on väritetty d_0 värillä, niin tällöin $P_{G,C}(\lambda) = max(\lambda - d_0, 0)$.

(3) Olkoon jokainen graafin G solmu myös osittaisessa värityksessä C. Kunnollinen väritys on siis jo tehty, joten $P_{G,C}(\lambda) = 1$.

Kussakin tapauksessa sovelletaan induktiota graafin G kaarilla ja saadaan Lause 4.8 todistetuksi.

□

4.2 Sudokugraafi

Sudokusta saadaan graafi, kun ruudut ovat solmuja ja väli piirretään sellaisten solmujen välille, jotka sijaitsevat samassa rivissä, sarakkeessa tai laatikossa. Kaksi solmua ovat siis viereisiä, jos ja vain jos ne ovat samassa rivissä, samassa sarakkeessa tai samassa laatikossa. Määritellään tämä vielä matemaattisesti.

Määritelmä 4.9. Olkoot $c(i, j)$ ja $c(i', j')$ astetta n olevan sudokun solmuja, joille $i, j, i', j' \in \{1, 2, ..., n^2\}$. Solmut $c(i, j)$ ja $c(i', j')$ ovat *viereisiä*, jos $i = i'$ tai $j = j'$ tai $\lceil \frac{i}{n} \rceil = \lceil \frac{i'}{n} \rceil$ ja $\lceil \frac{j}{n} \rceil = \lceil \frac{j'}{n} \rceil$. Tässä $\lceil \cdot \rceil$ tarkoittaa, että osamäärä pyöristetään ylöspäin seuraavaan kokonaislukuun. [9, s. 709]

Esimerkki 4.10. Tarkastellaan astetta $n = 3$ olevan sudokun solmuja $c(7, 8)$ ja $c(9, 9)$. Solmut eivät sijaitse samassa rivissä, $(7 \neq 9)$, eivätkä samassa sarakkeessa, $(8 \neq 9)$. Solmut ovat kuitenkin viereisiä, sillä $\lceil \frac{7}{n} \rceil = \lceil \frac{7}{3} \rceil = \lceil 2,333... \rceil = 3$ ja $\lceil \frac{9}{n} \rceil = \lceil \frac{9}{3} \rceil = 3$, sekä $\lceil \frac{8}{n} \rceil = \lceil \frac{8}{3} \rceil = \lceil 2,666... \rceil = 3$ ja $\lceil \frac{9}{n} \rceil = \lceil \frac{9}{3} \rceil = 3$. Solmut $c(7, 8)$ ja $c(9, 9)$ sijaitsevat siis samassa laatikossa $(L9)$.

Astetta 9 olevan sudokun graafissa on 81 solmua. Jokaiseen solmuun liittyy 20 väliä, katso Lause 4.12. Koska välit yhdistävät aina kaksi solmua, on sudokun graafissa yhteensä

$$81 \cdot \frac{20}{2} = 810$$

väliä. Suuren koon vuoksi sudokugraafia ei ole mielekästä piirtää. Tyhjiin ruutuihin tulevat numerot vastaavat värejä.

Määritelmä 4.11. Graafia, joka saadaan astetta n olevasta sudokusta, kutsutaan *sudokugraafiksi*. Värejä on käytössä n^2 kappaletta. Sudokugraafia merkitään X_n.[9]

Astetta 3 olevan sudokun sudokugraafia merkitään X_3 ja värejä on 9 kappaletta. Sudokun alkutilanne, jossa joissakin ruuduissa sijaitsee jokin numero, vastaa osittaista väritystä. Sudokun ratkaisu edellyttää tämän osittainen värityksen täydentämistä kunnolliseksi väritykseksi. Herää kysymyksiä kuten, onko tämä mahdollista, ja jos on, niin monella eri tavalla. Lauseen 4.8 mukaan tapojen lukumäärää, joilla saadaan sudokugraafin X_3 osittainen väritys täydennettyä kunnolliseksi väritykseksi, merkitään $P_{X_3,C}(9)$. Jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu, tulee tapoja olla vain yksi, siis $P_{X_3,C}(9) = 1$. Palataan yksikäsitteisen ratkaisun ehtoihin Kappaleessa 4.2.

Määritelmän 2.7 mukaan säännöllisen graafin kaikkien solmujen aste on sama. Sudokugraafi X_n on säännöllinen, sillä jokaisella solmulla on yhtä paljon viereisiä solmuja. Jokainen solmu on viereinen kaikkien samassa rivissä, sarakkeessa ja laatikossa olevien solmujen kanssa. Seuraava lause löytyy artikkelista [9].

Lause 4.12. *Säännöllisen sudokugraafin $X_n, n \in \mathbb{N}$ jokaisen solmun aste on*

$$3n^2 - 2n - 1 = (3n+1)(n-1).$$

Todistus. Todistetaan Lause 4.12 matemaattisella induktiotodistuksella.

Alkuaskel: Tarkastellaan Taulukon 1 sudokua. Jokaisella 4×4 sudokun solmulla, (esimerkiksi solmulla x), on jokaisella rivillä ja sarakkeella 3 viereistä solmua, (a_{1-6}). Lisäksi solmun laatikossa on vielä yksi viereinen solmu, (b), joka ei ole samassa rivissä tai sarakkeessa kuin kyseinen solmu. Lause pätee, kun $n = 2$, sillä sudokugraafin X_2 jokaisen solmun aste on $3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7$.

x	a_1	a_2	a_3
a_4	b		
a_5			
a_6			

Taulukko 1: Astetta 2 oleva sudoku

Induktioaskel: Oletetaan, että lause pätee astetta $n = k$ olevalle sudokugraafille X_k. Siis jokaisen solmun aste on $3k^2 - 2k - 1$. Todistetaan, että lause pätee myös astetta $n = k+1$ olevalle sudokugraafille X_{k+1}.

Astetta $n = k$ olevan sudokun yhdessä rivissä ja sarakkeessa on k^2 solmua. Astetta $n = k+1$ olevan sudokun yhdessä rivissä ja sarakkeessa on $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ solmua, siis $2k+1$ solmua enemmän kuin edellisessä sudokussa. Tarkastellaan solmua $c(i,j)$. Tämän solmun lisäksi astetta $n = k$ olevan sudokun rivissä i on $k^2 - 1$ solmua ja sarakkeessa j on $k^2 - 1$ solmua. Tarkastellaan nyt astetta $n = k+1$ olevaa sudokua ja edelleen solmua $c(i,j)$. Rivissä i on nyt solmun $c(i,j)$ lisäksi $k^2 - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k$ solmua. Sama pätee sarakkeelle j.

Astetta $n = k$ olevan sudokun laatikon koko on $k \times k$. Astetta $n = k+1$ olevan sudokun laatikon koko on $(k+1) \times (k+1)$, siis laatikossa on yksi rivi ja sarake enemmän kuin edellisessä sudokussa. Solmulla $c(i,j)$ on siis laatikossaan k^2 kappaletta viereisiä solmuja, jotka eivät sijaitse rivissä i tai sarakkeessa j.

Yhteensä sudokugraafin X_{k+1} solmulla $c(i,j)$ on

$$k^2 + 2k + k^2 + 2k + k^2 = 3k^2 + 4k$$

kappaletta viereisiä solmuja. Toisaalta $3(k+1)^2 - 2(k+1) - 1 = 3k^2 + 4k$ ja siis lause pätee myös astetta $n = k+1$ olevalle sudokugraafille X_{k+1}.

Matemaattisen induktioperiaatteen nojalla lause pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$. □

Lause 4.13. *Jokaiselle sudokugraafille $X_n, n \in \mathbb{N}$, on olemassa kunnollinen väritys, jossa käytetään n^2 väriä. Graafin X_n kromaattinen luku on n^2.*

Todistus. Selvästi astetta n olevan sudokun värittämiseksi tarvitaan vähintään n^2 väriä. Osoitetaan, että nämä n^2 väriä riittävät kunnolliseen väritykseen.

Olkoon $c(i,j)$ astetta n olevan sudokun solmu, jolle $0 \leq i \leq n^2 - 1$ ja $0 \leq j \leq n^2 - 1$. Olkoon $i = t_i n + d_i$, jossa $0 \leq t_i \leq n-1$ ja $0 \leq d_i \leq n-1$, ja samoin $j = t_j n + d_j$, jossa $0 \leq t_j \leq n-1$ ja $0 \leq d_j \leq n-1$.

Väritetään solmu $c(i,j)$ värillä $f(c(i,j)) = d_i n + t_i + nt_j + d_j$. Jotta tämä olisi kunnollinen väritys, on osoitettava, että kaksi viereistä solmua $c(i,j)$ ja $c(i',j')$ on väritetty eri väreillä. Jos $i = i'$, niin $f(c(i,j)) \neq f(c(i,j'))$, kun $j \neq j'$. Jos olisi $f(c(i,j)) = f(c(i,j'))$, niin $nt_j + d_j = nt_{j'} + d_{j'}$, jolloin $j = j'$. Samoin, jos $j = j'$, niin $f(c(i,j)) \neq f(c(i',j))$, kun $i \neq i'$.

Tarkastellaan vielä solmuja, jotka sijaitsevat samassa laatikossa. Olkoot solmut edelleen $c(i,j)$ ja $c(i',j')$. Jos $\lceil \frac{i}{n} \rceil = \lceil \frac{i'}{n} \rceil$ ja $\lceil \frac{j}{n} \rceil = \lceil \frac{j'}{n} \rceil$, niin tällöin $d_i = d_{i'}$ ja $d_j = d_{j'}$. Jos olisi $f(c(i,j)) = f(c(i',j'))$, niin tällöin $t_i + nt_j = t_{i'} + nt_{j'}$, josta $t_i = t_{i'}$ ja $t_j = t_{j'}$. Siis oltava $f(c(i,j)) \neq f(c(i',j'))$.

Kaksi viereistä solmua on siis väritetty eri väreillä, joten saatiin kunnollinen väritys.[9, s.711] □

Astetta 3 olevan sudokun kunnolliseksi värittämiseksi tarvitaan siis vähintään 9 eri väriä.

4.3 Alkutilanteen ehtoja yksikäsitteiselle ratkaisulle

Jokaisella sudokulla tulisi olla ainutlaatuinen, yksikäsitteinen ratkaisu. Sudokun alkutilanteesta on vaikeaa nähdä, onko sudokulla ratkaisuja yksi, useampia vai ei yhtään. Perehdytään seuraavaksi ehtoihin, jotka alkutilanteessa, eli osittaisessa värityksessä, on oltava, jotta tämä saadaan ratkaistua, siis täydennettyä yksikäsitteiseksi, kunnolliseksi väritykseksi.

Edellä nähtiin, että kunnollisessa värityksessä on käytettävä 9 eri väriä. Kuinka monta väriä alkutilanteen vihjeissä sitten on käytettävä, jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu?

Lause 4.14. *Olkoon graafin G kromaattinen luku $\chi(G)$ ja olkoon C graafin G osittainen väritys, jossa on käytetty $\chi(G) - 2$ väriä. Jos osittainen väritys C voidaan täydentää graafin G kunnolliseksi väritykseksi, niin on ainakin 2 eri tapaa tehdä tämä.*

Todistus. Koska osittaisessa värityksessä C ei ole käytetty kahta väriä, voidaan kunnollisessa värityksessä vaihtaa näiden kahden värin paikkoja ja saada toinen kunnollinen väritys.[9, s.710] □

Yksikäsitteisen ratkaisun saamiseksi tuli tapojen lukumäärän kuitenkin olla 1.

Seuraus 4.15. *Osittaisessa värityksessä käytettävien värien määrä on oltava vähintään $\chi(G) - 1$.*

Näin ollen astetta n olevan sudokun alkutilanteen vihjeissä on käytettävä vähintään $n^2 - 1$ väriä. Astetta 3 olevan sudokun alkutilanteen vihjeissä tulee siis käyttää 8 eri numeroa, jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu. Tarkastellaan tilannetta vielä kromaattisen polynomin avulla.

Lauseen 4.8 mukaan tapojen lukumäärä $P_{G,C}(\lambda)$, joilla saadaan osittainen väritys C graafin G kunnolliseksi väritykseksi, on kromaattinen polynomi, kun $\lambda \geq d_0$. Koska sudokugraafin X_3 kromaattinen luku on 9, tulee yksikäsitteisen ratkaisun saamiseksi olla $P_{X_3,C}(9) = 1$. Kunnolliseen väritykseen tarvitaan siis vähintään 9 eri väriä, joten ratkaisua ei saada, jos värejä on vähemmän. Siis $P_{X_3,C}(\lambda) = 0$ kaikille $\lambda = d_0, d_0 + 1, ..., 8$.

Määritelmä 4.16. Olkoon $q(\lambda)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Tällöin *tapojen lukumäärä*, joilla saadaan osittainen väritys C täydennettyä sudokugraafin X_3 kunnolliseksi väritykseksi on

$$P_{X_3,C}(\lambda) = (\lambda - d_0)(\lambda - (d_0 + 1)) \cdots (\lambda - 8)q(\lambda). \tag{4.1}$$

Jos kaavaan (4.1) sijoitetaan $\lambda = 9$, saadaan

$$\begin{aligned} P_{X_3,C}(9) &= (9-d_0)(9-(d_0+1))\cdots(9-8)q(9) \\ &= (9-d_0)(8-d_0)\cdots q(9) \\ &= (9-d_0)!q(9) \end{aligned}$$

Osittaisessa värityksessä käytettävien värien lukumäärä tulee siis olla $d_0 = 8$, sillä jos $d_0 \leq 7$, niin $P_{X_3,C}(9) = (9-d_0)!q(9) \geq 2$. Sama nähtiin lauseessa 4.14.

Mitä vihjeitä alussa on annettava ja kuinka nämä vihjeet on sijoiteltava, jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu? Käsitellään seuraavaksi tilanne, jonka puuttuminen osittaisessa värityksessä johtaisi kahteen eri kunnolliseen väritykseen.

a	b
b	a

Taulukko 2: Neljän ruudun täydentäminen, vaihtoehto 1

b	a
a	b

Taulukko 3: Neljän ruudun täydentäminen, vaihtoehto 2

Kuvitellaan tilanne, jossa sudoku on täydennetty niin pitkälle, että tyhjänä on enää neljän ruudun (solmun) neliö, ja jokaisella neljällä solmulla on kaksi kandidaattia, värit a ja b. Nyt siis sudokujen sääntöjen mukaan kumpi tahansa Taulukoista 2 tai 3 on mahdollinen täyttämään nämä neljä ruutua.

Lause 4.17. *Olkoon sudokugraafi X_3 täydennetty siten, että enää 4 solmua on värittämättä ja jokaisella näistä solmuista on 2 kandidaattia. Tällöin osittaisessa värityksessä vähintään yksi näistä solmuista on annettava väritettynä, jotta saadaan yksikäsitteinen kunnollinen väritys.*

Todistus. Todistetaan Lause 4.17 vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että osittaisessa värityksessä kaikki kyseessä olevan neliön solmut ovat värittämättä. Nyt siis on kaksi tapaa täydentää väritys kunnolliseksi väritykseksi. Yksikäsitteisen ratkaisun saamiseksi oli tapojen lukumäärän kuitenkin oltava yksi. Siis vähintään yksi solmuista on annettava väritettynä alkutilanteessa. □

9		6		7		4		3
			4			2		
	7			2	3		1	
5						1		
	4		2		8		6	
		3						5
	3		7				5	
		7			5			
4		5		1		7		8

Kuva 5: Esimerkin 4.18 sudoku,[9, s.711]

Tarkastellaan Lauseen 4.17 tilannetta vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 4.18. Tarkastellaan Kuvan 5 sudokua. Etsitään kaikki sudokun pakolliset numerot sudokun sääntöjen mukaisesti. Sudoku voidaan ratkaista esimerkiksi Kappaleen 6.2 algoritmin avulla. Lopussa päädytään tilanteeseen Kuvassa 6.

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1			8	2	5
2	3	8	7			6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

Kuva 6: Sudokun 5 täydentäminen

Sudokua ei saada ratkaistua loppuun asti. Neljä solua jää tyhjäksi. Kumpi tahansa Taulukoista 4 ja 5 täydentämään tyhjät solut on mahdollinen Kuvan 6 sudokun ratkaisu.[9, s.712]

Jos sudokua ratkaistaessa loppuun jää siis 4 tyhjää ruutua, voi ratkaisuja olla useampia. Tämä saadaan Lauseen 4.17 mukaan suljettua pois antamalla aluksi vihjeenä yksi näistä neljästä ruudusta. Sen sijaan lopussa 3 tyhjää

9	4
4	9

Taulukko 4: Sudokun 6 täydentäminen, vaihtoehto 1

4	9
9	4

Taulukko 5: Sudokun 6 täydentäminen, vaihtoehto 2

ruutua antaa aina yksikäsitteisen ratkaisun.[16]

Kuinka monta vihjettä alkutilanteessa on annettava, jotta sudokulla olisi yksikäsitteinen ratkaisu? Tavallisesti vihjeitä on annettu yli kaksikymmentä, mutta kiinnostavaa on vihjeiden vähimmäismäärä. Seuraava päättely on yleinen ja sitä on esitetty sudokun keskustelufoorumilla.

Astetta 3 olevien sudokujen lukumäärä on noin $6,7 \times 10^{21}$, katso Kappale 5.2. Näin monta tapaa on täydentää tyhjä ruudukko. Jos ruudukkoon sijoitetaan yksi vihje, tulee tämä lukumäärä jakaa luvulla 9. Jos vihjeitä sijoitetaan kaksi, jaetaan luvulla 9^2. Kiinnostava kohta saadaan sijoitettaessa vihjeitä 22 tai 23 kappaletta. Nyt

$$\frac{6,7 \times 10^{21}}{9^{22}} = 6,8 \quad \text{ja} \quad \frac{6,7 \times 10^{21}}{9^{23}} = 0,75,$$

josta seuraa, että yksikäsitteinen ratkaisun vihjeiden vähimmäismäärä olisi 23.[14, s.9]

Edellinen päättely ei voi kuitenkaan pitää paikkaansa, sillä on löydetty sudokuja, joiden alkutilanteessa on jopa vain 17 vihjettä. Tällä menettelyllä voidaan laskea pikemminkin todennäköisyyttä sudokujen esiintymiselle, joissa on alle 23 vihjettä.

Yleisesti on tunnettua, että alkutilanteen vihjeiden vähimmäismäärä on juuri 17. Gordon Royle on kerännyt 49151 sudokua, joissa on alussa annettu vain 17 vihjettä. Nämä sudokut ovat vieläpä kaikki erilaisia, ne ovat ei-ekvivalentteja, katso Kappale 5.1.[15]

Vasta vuonna 2012 todistettiin, ettei sudokuja, joissa on vain 16 vihjettä, ole olemassa. Gary McGuire, Bastian Tugemann ja Gilles Civario kehittivät uuden algoritmin, jolla yrittivät löytyy sudokun, jossa olisi vain 16 vihjettä. Laajassa prosessissaan he käyttivät tietokoneen apua. Tällaista sudokua ei löytynyt, joten he todistivat, että vihjeiden vähimmäismäärä on tasan 17, jotta sudokulla on yksikäsitteinen ratkaisu.[14]

Yksikäsitteiseen ratkaisuun vaikuttavat alkutilanteessa siis värien ja vihjeiden lukumäärät sekä vihjeiden sijoittelu. Värejä on oltava vähintään 8 kappaletta ja vihjeitä vähintään 17 kappaletta. Jotta sudokun yksikäsitteisestä ratkaisusta varmistuisi, kannattaa sudoku ratkaista, ja näin tarkistaa myös vihjeiden sijoittelu. Vielä ei ole olemassa yksinkertaista työkalua selvittämään, onko vihjeet sijoiteltu siten, että sudokulla on varmasti yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 4.19. Kuvan 7 sudokun alkutilanteessa on annettu vähimmäismäärä vihjeitä ja käytetty vain 8 väriä. Sudoku voidaan ratkaista käyttäen esimerkiksi Kappaleessa 6.2 esiteltävää algoritmia.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

Kuva 7: Vähimmäismäärä vihjeitä,[14, s.3]

Maailman vaikeimmassa sudokussa, Kappale 7.2, ei suinkaan ole minimilukumäärä vihjeitä, vaan siinä on annettu alkutilanteessa 21 vihjettä.

5 Sudokujen lukumäärä

Sudokujen lukumäärää laskettaessa voidaan ensin laskea tavallisten Latinalaisten neliöiden lukumäärä. Astetta 3 olevia 9×9 Latinalaisia neliöitä on noin $5,5 \cdot 10^{27}$ kappaletta. Tämän jälkeen huomioidaan sudokua koskevat erikoissäännöt ja lukumäärä pienenee. Sudokuja onkin vain $0,00012\%$ Latinalaisten neliöiden lukumäärästä, eli noin $6,7 \cdot 10^{21}$ kappaletta. Tämän lukumäärän ovat laskeneet Bertram Felgenhauer ja Frazer Jarvis, ja sitä esitellään Kappaleessa 5.2.

Jos huomioidaan sudokujen symmetriat, niin sudokujen lukumäärä pienenee. Sudokut ovat periaatteessa samat, jos ne voidaan ne voidaan muuttaa toisikseen jonkin symmetrian avulla.

Kappaleessa 5.3 arvioidaan yleisesti n astetta olevien sudokujen lukumäätää ja verrataan sitä Latinalaisten neliöiden lukumäärään.

5.1 Sudokun symmetrioita

Sudokun symmetriat voidaan jakaa ainakin kuuteen eri symmetrialajiin. Symmetrioita voi tehdä samalle sudokulle peräkkäin useampia.

Kun on löydetty sudokun yksikäsitteinen ratkaisu, voidaan tästä muodostaa uusia sudokuja yksinkertaisesti vaihtamalla solujen pakollisia numeroita toisikseen. Esimerkiksi kaikkiin niihin soluihin, joissa on luku 1, voidaan vaihtaa luku 2. Luvun 2 paikalle voi laittaa luvun 1, tai *uudelleen merkitsemistä* voidaan jatkaa ja sijoittaa näihin soluihin vaikka luku 3. Kunnollisessa värityksessä vaihdetaan siis solmujen värejä. Astetta 3 olevalla sudokulla ensimmäinen luku voidaan vaihtaa 8 muuhun lukuun, (tai jättää itsekseen). On siis 9 eri mahdollisuutta tehdä uudelleen merkitseminen. Tämän jälkeen seuraavalla luvulla on 8 eri mahdollisuutta ja seuraavalla enää 7 eri mahdollisuutta. Yhdestä sudokusta saadaan siis uudelleen merkitsemällä $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \quad \cdots \quad \cdot 1 = 9! = 362880$ uutta sudokua. Astetta n olevasta sudokusta saadaan uudelleen merkitsemällä $(n^2)!$ uutta sudokua.

Määritellään uudelleen merkitseminen vielä matemaattisesti. Olkoon luku a_{ij} solun $c(i,j)$ pakollinen numero. Olkoon funktio σ joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ permutaatiofunktio. Uudelleen merkitsemisessä soluun $c(i,j)$ tulee uusi luku $\sigma(a_{ij})$ ja saadaan uusi sudoku.[9, s.712]

Sudokusta saadaan toinen sudoku *transpoosilla.* Rivit vaihdetaan sarakkeiksi numerojärjestyksessä ja sudokun säännöt ovat edelleen voimassa. Näin saadaan yksi uusi sudoku.

Määritelmän 3.4 mukaan nippu tarkoittaa kolmen peräkkäisen rivin yhdistelmää ja pino kolmen peräkkäisen sarakkeen yhdistelmää. Astetta 3 olevalla sudokulla on kolme nippua, joiden paikkoja voidaan vaihtaa keskenään. Saadaan $3! = 6$ uutta sudokua. Samoin kolmen pinon paikkoja voidaan vaihtaa keskenään ja saadaan 3! uutta sudokua. Yhteensä *nippujen ja pinojen vaihtamisella* saadaan 12 uutta sudokua. Astetta n olevasta sudokusta saadaan molemmissa tapauksissa $n!$ uutta sudokua.

6	3	9	5	7	4	1	8	2
5	4	1	8	2	9	3	7	6
7	8	2	6	1	3	9	5	4
1	9	8	4	6	7	5	2	3
3	6	5	9	8	2	4	1	7
4	2	7	1	3	5	8	6	9
9	5	6	7	4	8	2	3	1
8	1	3	2	9	6	7	4	5
2	7	4	3	5	1	6	9	8

Kuva 8: Esimerkin 5.1 sudoku,[5, s.465]

Esimerkki 5.1. Alkuperäisestä sudokusta, Kuva 8, on saatu uusi sudoku, Kuva 9, vaihtamalla ensimmäinen nippu kolmannen nipun paikalle, toinen nippu ensimmäisen nipun paikalle ja kolmas nippu toisen nipun paikalle.

Rivien paikkoja voidaan vaihtaa yhden nipun sisällä. Astetta 3 olevan sudokun sisällä voidaan rivejä vaihtaa 3! eri tavalla. Koska nippuja on kolme, saadaan tällä tavoin $(3!)^3$ uutta sudokua. Myös sarakkeiden paikkoja voidaan vaihtaa nippujen sisällä. Yhteensä näillä tavoin saadaan $(3!)^3 + (3!)^3 = 2 \cdot 216 = 432$ sudokua. Astetta n olevasta sudokusta saadaan *rivien vaihtamisella nippujen sisällä* ja *sarakkeiden vaihtamisella pinojen sisällä* molemmissa $(n!)^n$ uutta sudokua.

Sudokua voidaan kiertää keskipisteen ympäri. *Rotaatioita* on neljä erilaista; voidaan kiertää 90, 180 tai 240 astetta. Myös 0 asteen kierto lasketaan yhdeksi rotaatioksi.

5	7	4	1	8	2	6	3	9
8	2	9	3	7	6	5	4	1
6	1	3	9	5	4	7	8	2
4	6	7	5	2	3	1	9	8
9	8	2	4	1	7	3	6	5
1	3	5	8	6	9	4	2	7
7	4	8	2	3	1	9	5	6
2	9	6	7	4	5	8	1	3
3	5	1	6	9	8	2	7	4

Kuva 9: Nippujen vaihto Kuvan 8 sudokusta

Sudoku voidaan myös heijastaa jonkin akselin suhteen. *Heijastus* voidaan tehdä pystyakselin tai vaaka-akselin tai kumman tahansa diagonaalin suhteen. Jos sudokulle tehdään rotaatioita ja heijastuksia peräkkäin, vastaa se aina yhtä neljästä rotaatiosta tai neljästä heijastuksesta.[16, s.55]

Esimerkki 5.2. Esimerkin 5.1 sudokua, Kuva 8, kierretään ensin 180 astetta ja heijastetaan sitten vaaka-akselin suhteen. Sama lopputulos, Kuva 10, saadaan pelkästään heijastamalla pystyakselin suhteen.

2	8	1	4	7	5	9	3	6
6	7	3	9	2	8	1	4	5
4	5	9	3	1	6	2	8	7
3	2	5	7	6	4	8	9	1
7	1	4	2	8	9	5	6	3
9	6	8	5	3	1	7	2	4
1	3	2	8	4	7	6	5	9
5	4	7	6	9	2	3	1	8
8	9	6	1	5	3	4	7	2

Kuva 10: Kierto ja heijastus Kuvan 8 sudokusta

Määritelmä 5.3. Kaksi sudokua ovat *ekvivalentteja*, jos toinen voidaan muuttaa toiseksi jollain edellisistä symmetrioista tai symmetrioiden kombinaatioilla.[9]

Ekvivalentit sudokut ajatellaan samoiksi, kun lasketaan sudokujen lukumäärää.

Esimerkki 5.4. Kuvan 9 sudoku ja Kuvan 10 sudoku ovat ekvivalentteja, sillä Kuvan 10 sudoku on saatu Kuvan 9 sudokusta nippujen paikkoja vaihtamalla ja heijastamalla pystyakselin suhteen.

5.2 Astetta 3 olevien sudokujen lukumäärä

Felgenhauer ja Jarvis laskevat sudokujen lukumäärää laskiessaan artikkelissa [6] ja [7] ensin kaikki vaihtoehdot, joilla voidaan täydentää sudokun ensimmäinen nippu, eli laatikot $L1$, $L2$ ja $L3$. Näille vaihtoehdoille he joutuvat raa'asti laskemaan kaikki mahdolliset tavat saada sudokun ratkaisu, (bruteforce calculating). Lukumäärän laskemista helpoittavat kuitenkin sudokujen symmetriat, sillä jos on täydennetty ekvivalenttien sudokujen ensimmäinen nippu, on näillä sudokuilla yhtä monta tapaa saada ratkaisu.

Olkoon N_0 sudokujen lukumäärä. Solujen pakollisten numeroiden uudelleen merkitsemisellä yksi sudoku on $9! = 362880$:n sudokun kanssa ekvivalentti. Nyt siis lukumäärä vähenee ja uusi lukumäärä on $N_1 = \frac{N_0}{9!}$. Tämä huomioiden sudokun ensimmäinen laatikko $L1$ voidaan kiinnittää.

Määritelmä 5.5. Laatikko $L1$ on *standardissa muodossa* Taulukossa 6.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Taulukko 6: Laatikon $L1$ standardi muoto

Nyt voidaan laskea uutta lukumäärää N_1, joka on huomattavasti pienempi kuin alkuperäinen sudokujen lukumäärä N_0. Jos lopuksi halutaan kaikkien sudokujen lukumäärä, jossa on mukana siis myös ekvivalentit sudokut, niin kerrotaan tämä määrä luvulla 9!. Kuinka monella tavalla voidaan täydentää laatikot $L2$ ja $L3$, kun laatikko $L1$ on standardissa muodossa?

Rivillä 1 on jo siis luvut 1, 2 ja 3. On yhteensä 20 tapaa saada luvut $4, 5, ..., 9$ ensimmäisille riville siten, että kolme luvuista on laatikossa $L2$ ja kolme luvuista on laatikossa $L3$. Vaihtoehtoja on laittaa laatikon $L2$ ensimmäiselle miniriville laatikon $L1$ toisen minirivin tai kolmannen minirivin luvut tai lukuja näiden sekoituksista. Tässä ei ole vielä huomioitu lukujen järjestystä laatikoiden sisällä.

Jos esimerkiksi laatikon $L2$ ensimmäisellä minirivillä on luvut 4, 5 ja 6, niin näiden lukujen järjestyksiä on 3! kappaletta. Ensimmäisellä minirivillä laatikossa $L3$ on näin ollen luvut 7, 8 ja 9, joiden mahdollisia järjestyksiä on edelleen 3! kappaletta. Jokaisella laatikon $L2$ ja $L3$ minirivillä on lukujen järjestyksiä 3! kappaletta. Minirivejä on kahdessa laatikkossa yhteensä 6 kappaletta. Nyt tapoja täydentää laatikot $L2$ ja $L3$ on $(3!)^6$ kappaletta.

Olkoon nyt rivi 1 täydennetty siten, että luvut 7, 8 ja 9 ovat laatikossa $L2$ ja luvut 4, 5 ja 6 laatikossa $L3$. Samalla päättelyllä tapoja täydentää laatikot $L2$ ja $L3$ on $(3!)^6$ kappaletta.

Käsittelemättä on vielä 18 vaihtoehtoa täydentää rivi 1. Nyt laatikoissa $L2$ ja $L3$ on ensimmäisellä rivillä laatikon $L1$ minirivien 2 ja 3 lukujen sekoituksia. Olkoon esimerkiksi laatikossa $L2$ ensimmäisellä minirivillä luvut 4, 5 ja 7, missä järjestyksessä tahansa, ja laatikossa $L3$ ensimmäisellä minirivillä luvut 6, 8 ja 9, missä järjestyksessä tahansa. Nyt tapoja täydentää laatikot $L2$ ja $L3$ on $3 \cdot (3!)^6$ kappaletta.

Yhteensä tapoja täydentää laatikot $L2$ ja $L3$ on

$$(3!)^6 + (3!)^6 + 18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 56 \cdot (3!)^6 = 2612736$$

kappaletta.

Nippu 1 on nyt täydennetty. Kuinka monella tavalla voidaan kukin 2612736 tapaa täydentää sudokun ratkaisuksi? Laskemisen helpottamiseksi tulee tätä lukua pienentää huomioiden sudokujen muut symmetriat, koska ekvivalenteilla sudokuilla on yhtä monta tapaa saada sudokun ratkaisu. Tarkastellaan nyt siis ekvivalenttialuokkia.

Pinojen 2 ja 3 sisällä voidaan laatikoissa $L2$ ja $L3$ vaihtaa sarakkeiden paikkoja, jolloin yhdellä sudokulla on $(3!)^2 = 36$ ekvivalenttia sudokua. Myös pinojen 2 ja 3 paikkoja voidaan vaihtaa, jolloin siis yhdellä sudokulla on $2 \cdot 36 = 72$ ekvivalenttia sudokua. Ekvivalenttiluokkia on $\frac{2612736}{72} = 36288$.

Otetaan symmetrioiden laskemiseen mukaan myös laatikko $L1$. Jos vaihdetaan kaikkien kolmen pinon paikkoja, sekä vielä sarakkeita pinojen sisällä, niin yhdellä sudokulla on $3! \cdot (3!)^3 = (3!)^4 = 1296$ ekvivalenttia sudokua. Uudelleen merkitsemisellä laatikko $L1$ saatetaan takaisin standardiin muotoon. Ekvivalenttialuokkia täydentää laatikot $L2$ ja $L3$ on enää 2051.[6, s.18]

Myös rivien paikkoja voidaan vaihtaa nipun 1 sisällä. Edelleen laatikko $L1$

tulee saattaa tämän jälkeen standardiin muotoon uudelleen merkitsemisellä. Ekvivalenttiluokkien määrä vähenee 416 kappaleeseen.

Esimerkki 5.6. Olkoon laatikot $L1$, $L2$ ja $L3$ täydennetty. Tarkastellaan nyt tämän ensimmäinen nipun sarakkeita. Olkoon sarakkeessa 6 luvut 8, 9 ja 6, tässä järjestyksessä. Olkoon samat luvut sarakkeessa 9, mutta järjestys on eri; 9, 8 ja 6. Jos sudokussa tehdään nyt uudelleen merkitseminen ja vaihdetaan luvut 8 ja 9, niin sudokun ratkaisu ei muutu.

Olkoon sudokun nippu 1 täydennetty ja olkoon $a, b \in \{1, 2, ..., 9\}$ ja sarakkeet $j_1, j_2 \in \{1, 2, ..., 9\}$. Olkoon nyt luvut a ja b sarakkeessa j_1, tässä järjestyksessä, ja olkoon samat luvut b ja a sarakkeessa j_2, tässä järjestyksessä. Nyt luku a voidaan merkitä uudelleen luvuksi b ja toisinpäin. Kun tämä tehdään useammassa sarakkeessa, kutsutaan sitä *kopioinniksi*. Kopioinnilla saadaan alkuperäisen sudokun kanssa ekvivalentti sudoku.

Useasti nipussa 1 on monia sarakepareja, joista löytyy samat lukuparit. Kopioinnin jälkeen saadulla sudokulla on yhtä monta tapaa saada sudokun ratkaisu kuin alkuperäisellä sudokulla. Kun muokataan laatikkoa $L1$, täytyy se saattaa takaisin standardiin muotoon. Yleisempi muoto löytää ekvivalentteja sudokuja on sudokusuorakulmioiden avulla.[7, s.4]

Määritelmä 5.7. *Sudokusuorakulmiossa* on n^2 saraketta ja kn riviä ja sen aste on (k, n).[9, s.716]

Sudokusuorakulmiossa pätevät samat säännöt kuin normaalissakin sudokussa. Sudokusuorakulmioon tulee joukon $\{1, 2, ..., n^2\}$ alkioita siten, että jokainen alkio esiintyy tasan kerran jokaisessa rivissä ja sarakkeessa ja kokoa $n \times n$ olevassa laatikossa.

Kokoa 2×2 olevien sudokusuorakulmioiden avulla ekvivalenttiluokkien lukumääräksi tulee 174. Käyttämällä kokoa 2×3, 3×2 ja 4×2 olevia sudokusuorakulmioita ja tietokoneen apua ekvivalenttiluokkia on loppujen lopuksi vain 44.[6]

Poistamalla kaikki ekvivalentit sudokut, jäljelle on jäänyt 44 tapaa täydentää $L2$ ja $L3$. Voidaan edetä laatikoiden $L4$ ja $L7$ täydentämiseen. Ensimmäisessä pinossa voidaan käydä läpi kaikki samat symmetriat kuin edellä käytiin ensimmäisessä nipussa. Edelleen tapojen lukumäärä täydentää laatikot $L4$ ja $L7$ vähenee.

Kuinka monta tapaa on sitten loppujen lopuksi täydentää loputkin laatikot, eli saada sudokun ratkaisu? Jotta saadaan täydennettyä laatikot $L5$,

$L6$, $L8$ ja $L9$, on käytettävä tietokoneen apua ja käytävä läpi kaikki mahdolliset tavat, jotka edellä saatiin. Sudokujen lukumäärä on noin $3,5 \cdot 10^{12}$, kun symmetriat otetaan huomioon. Kaiken kaikkiaan sudokujen lukumääräksi saatiin $N_0 = 6670903752021072936960$, eli noin $6,7 \cdot 10^{21}$ kappaletta.[7]

Myös muut ovat yrittäneet laskea sudokujen lukumäärää. Kevin Kilfoil pääsi ratkaisussaan lähelle oikeaa; virhe on vain $0,2\%$ oikeasta arvosta. Tarkastellaan hänen tapaansa laskea sudokujen lukumäärä seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 5.8. Tapoja täydentää laatikot $L1$, $L2$, ..., $L9$ luvuilla $1, 2, ..., 9$ on $N = (9!)^9$. Tapoja, joilla saadaan täydennettyä yksi nippu, (tai yksi pino), siten, että jokaisessa laatikossa ja rivissä, (tai sarakkeessa), on luvut $1, 2, ..., 9$, on 948109639680. Koska nippuja, (ja pinoja), on sudokussa kolme kappaletta, on tapoja täydentää kolme nippua, (tai pinoa), 948109639680^3.

Jakamalla tämä tapojen lukumäärällä, joilla laatikot $L1$, $L2$, ..., $L9$ voidaan täydentää, saadaan sudokun riviominaisuus, (ja sarakeominaisuus),

$$k = \frac{948109639680^3}{(9!)^9}.$$

Rivi- ja sarakeominaisuus k huomioi siis sudokun täydentämisen sääntöjen mukaisesti.

Nyt sudokujen lukumääräksi saadaan

$$Nk^2 = \frac{948109639680^6}{(9!)^9} \approx 6,7 \cdot 10^{21}.$$

Virhe $0,2\%$ johtuu siitä, että riveillä ja sarakkeilla on keskinäinen riippuvuus, jota tässä ei ole huomioitu.[6, s.22]

5.3 Astetta n olevien sudokujen lukumäärä

Yleisesti voidaan myös arvioida, kuinka monta kappaletta astetta n olevia sudokuja on olemassa. Tarkkaa lukumäärää on vaikea laskea, mutta yläraja voidaan selvittää. Sudokujen lukumäärää voidaan verrata Latinalaisten neliöiden lukumäärään, kun tunnetaan astetta n olevien Latinalaisten neliöiden alaraja, katso Lause 2.3.

Määritelmä 5.9. Astetta n olevien sudokujen lukumäärää merkitään S_n.

Jokaiseen astetta n olevan sudokun laatikkoon on tultava luvut $\{1, 2, ..., n^2\}$, missä tahansa järjestyksessä. Tapoja täydentää yksi laatikko on siis $(n^2)!$. Koska laatikoita on n^2 kappaletta, saadaan sudokujen karkea yläraja,

$$S_n \leq [(n^2)!]^{n^2}.$$

Astetta n olevien sudokujen lukumäärää voidaan tarkastella samalla tavalla kuin Kappaleessa 5.2 laskettiin astetta 3 olevien sudokujen lukumäärää. Ensin lasketaan, kuinka monella tavalla ensimmäinen nippu voidaan täydentää, ja sitten siirrytään muihin nippuihin. Astetta n olevalla sudokulla on nippuja n kappaletta. Kussakin nipussa on n riviä.

Ensimmäisen nipun ensimmäinen rivi voidaan täydentää $(n^2)!$ tavalla. Huomioimalla sudokun säännöt toinen rivi voidaan täydentää

$$[(n^2 - n)!]^{\frac{n}{n-1}} \tag{5.1}$$

tavalla. Samoin kolmas rivi voidaan täydentää

$$[(n^2 - 2n)!]^{\frac{n}{n-2}} \tag{5.2}$$

tavalla.[9, s.714]

Samalla tavalla päätellään, että ensimmäisen nipun k:nnes rivi, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, voidaan täydentää

$$[(n^2 - (k-1)n)!]^{\frac{n}{n-(k-1)}} \tag{5.3}$$

tavalla. Kaavojen (5.1-5.3) nojalla ensimmäinen nippu voidaan täydentää

$$\prod_{k=1}^{n} [(n^2 - (k-1)n)!]^{\frac{n}{n-(k-1)}}$$

tavalla.

Jatketaan täydentämistä muihin nippuihin. Oletetaan, että nippuja on täydennetty $(k-1)$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, kappaletta. Kuinka monella tavalla voidaan nyt täydentää k:nnes nippu? Tämän nipun ensimmäinen solu voidaan täydentää $n^2 - (k-1)n$ tavalla, sillä sarakkeeseen 1 on tultava luvut $1, 2, ..., n^2$ ja nippuja on jo täydennetty $(k-1)$ kappaletta. Täydennettäessä muita ensimmäisen rivin soluja tulee kunkin solun kohdalla huomioida ne luvut, jotka jo sijaitsevat solun sarakkeessa. Voidaan arvioida yläraja ensimmäinen rivin täydentämiseksi. Ensimmäinen rivi k:nnessa nipussa voidaan siis täydentää korkeintaan

$$[(n^2-(k-1)n)!]^{\frac{n}{n-(k-1)}} = [(n^2-(k-1)n)!]^{\frac{n^2}{n^2-(k-1)n}} \tag{5.4}$$

tavalla.[9, s.715]

Samoin toinen rivi k:nnessa nipussa voidaan täydentää korkeintaan

$$[(n^2-((k-1)n+1))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+1)}} \tag{5.5}$$

tavalla ja k:nnen nipun k:nnes rivi voidaan täydentää korkeintaan

$$[(n^2-((k-1)n+k))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+k)}} \tag{5.6}$$

tavalla.

Mielenkiintoista on, kuinka monella tavalla k:nnen nipun $(k+1)$:nnes rivi voidaan täydentää. Soluja täydennettäessä tulee kunkin solun kohdalla huomioida ne luvut, jotka sijaitsevat solun laatikossa. Jokaiseen laatikkoon on tultava luvut $1, 2, ..., n^2$ ja nipun k rivillä $k+1$ jokaisen solun laatikossa on jo kn lukua. Nyt k:nnen nipun $(k+1)$:nnes rivi voidaan täydentää korkeintaan

$$[(n^2-kn)!]^{\frac{n^2}{n^2-kn}} \tag{5.7}$$

tavalla. Samoin saadaan täydennettyä loputkin k:nnen nipun rivit. Kaavojen (5.4-5.7) nojalla k:nnes nippu voidaan täydentää korkeintaan

$$\begin{gathered}[(n^2-(k-1)n)!]^{\frac{n^2}{n^2-(k-1)n}}[(n^2-((k-1)n+1))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+1)}}\cdots\\ [(n^2-((k-1)n+k))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+k)}}[(n^2-kn)!]^{\frac{n^2}{n^2-kn}}\cdots\\ [(n^2-(n-1)n)!]^{\frac{n^2}{n^2-(n-1)n}}\end{gathered}$$

tavalla.

Nyt saadaan astetta n olevien sudokujen yläraja,

$$\begin{gathered}S_n \leq \prod_{k=1}^{n}[(n^2-(k-1)n)!]^{\frac{n^2}{n^2-(k-1)n}}[(n^2-((k-1)n+1))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+1)}}\cdots\\ [(n^2-((k-1)n+k))!]^{\frac{n^2}{n^2-((k-1)n+k)}}[(n^2-kn)!]^{\frac{n^2}{n^2-kn}}\cdots\\ [(n^2-(n-1)n)!]^{\frac{n^2}{n^2-(n-1)n}}.\end{gathered}$$

Sudokujen ylärajaa voidaan edelleen pienentää.

Lause 5.10. *Astetta n olevien sudokujen lukumäärä on ylhäältä rajoitettu,*

$$S_n \leq n^{2n^4} e^{-2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}, \tag{5.8}$$

kun n on tarpeeksi suuri.

Todistus. Todistus löytyy artikkelista [9, s.715]. Todistuksessa käytetään apuna Stirlingin kaavaa, katso Huomautus 2.4. Päästään kaavaan (5.9), josta saadaan helposti kaava (5.8) johdettua.

$$\begin{aligned}
\frac{\log S_n}{n^2} &\leq 2n^2 \log n - 2,5n^2 + O(n \log n) \qquad (5.9)\\
\log S_n &\leq 2n^4 \log n - 2,5n^4 + O(n \log n)n^2\\
S_n &\leq e^{2n^4 \log n - 2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}\\
S_n &\leq e^{\log n^{2n^4} - 2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}\\
S_n &\leq n^{2n^4} e^{-2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}
\end{aligned}$$

□

Verrataan sudokujen lukumäärää Latinalaisten neliöiden lukumäärään. Kaikki sudokut ovat myös Latinalaisia neliöitä, mutta vain harva Latinalainen neliö on sudoku.

Lause 5.11. *Olkoon p_n todennäköisyys sille, että sattumanvaraisesti valittu, astetta n oleva Latinalainen neliö olisi myös sudoku. Tällöin*

$$p_n \leq e^{-0{,}5n^4 + O(n^3 \log n)},$$

ja $p_n \to 0$, kun $n \to \infty$.[9, s.715]

Todistus. Lauseen 5.10 nojalla tiedämme sudokujen lukumäärän ylärajan,

$$S_n \leq n^{2n^4} e^{-2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}.$$

Lauseen 2.3 nojalla tiedämme Latinalaisten neliöiden lukumäärän alarajan,

$$L_n \geq n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
p_n &\leq \frac{n^{2n^4} e^{-2{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}}{n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}}\\
&= e^{-2{,}5n^4 + O(n^3 \log n) - (-2n^4 + O(n^2 \log n))}\\
&= e^{-0{,}5n^4 + O(n^3 \log n)}.
\end{aligned}$$

Kun n on tarpeeksi suuri, todennäköisyys p_n lähenee nollaa, sillä

$$\lim_{n \to \infty} e^{-0{,}5n^4 + O(n^3 \log n)} = 0.$$

□

Lauseen 5.11 nojalla sudokuja on huomattavasti vähemmän kuin Latinalaisia neliöitä. Mitä suurempi Latinalaisen neliön aste n on, sitä vähemmän on samaa astetta n olevia sudokuja.

6 Algoritmi sudokun ratkaisemiseksi

Kirjallisuudessa sudokun ratkaisemiseksi on esitetty useita eri algoritmeja. Tunnetuimmat algoritmit ovat nimeltään XY-wing, Swordfish ja X-wing. Monet algoritmit vaativat tietokoneen apua. Tässä kappaleessa käydään läpi sellainen teoria, jonka avulla voi ratkaista sudokun käyttäen pelkästään kynää ja paperia. Algoritmin on kehittänyt James Crook ja hän esittelee sen artikkelissaan [5]. Keskitytään astetta 3 olevan sudokun ratkaisemiseen.

Algoritmit alkavat yleensä samalla tavalla. Ensin etsitään pakollisia numeroita, eli etsitään soluihin varmasti tulevia lukuja siten, että sudokun säännöt ovat voimassa. Jokaiseen riviin, sarakkeeseen ja laatikkoon tulee saada luvut $1, 2, ..., 9$, jokainen luku täsmälleen yhden kerran.

6.1 Ennakoivat joukot

Sudokua ratkaistaessa ei voi olla aina varma, mikä on solun pakollinen numero. Soluun tuntuu sopivan useampi luku. Näitä lukuja kutsutaan Määritelmän 3.6 mukaisesti solun kandidaateiksi. Kandidaattien joukoilla on kirjallisuudessa useita eri nimityksiä.

Määritelmä 6.1. Solun $c(i, j)$ kandidaattien joukkoa kutsutaan solun *merkinnäksi.*

Siinä vaiheessa, kun pakollisia numeroita ei enää löydy, kannattaakin tehdä solujen merkinnät, eli merkitä kaikki solun kandidaatit solun alareunaan.

Tarkastellaan m kappaletta sudokun soluja, jotka sijaitsevat yhdessä rivissä, sarakkeessa tai laatikossa. Merkitään näitä soluja

$$\{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\},$$

jossa $2 \leq m \leq 9$. Tarkastellaan näiden m solujen merkintöjä.

Määritelmä 6.2. *Ennakoiva joukko* X muodostuu joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ alkioista ja sen koko on m, $2 \leq m \leq 9$. Ainoastaan ennakoivan joukon X alkiot ovat m solun kandidaatteja. Jos siis $k \in \{1, 2, ..., 9\}$, mutta k ei ole ennakoivan joukon X alkio, niin k ei voi olla yhdenkään kyseessä olevan m solun kandidaatti.

Ennakoivaa joukkoa X merkitään

$$\{\{n_1, n_2, ..., n_m\}, \{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\}\},$$

missä $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$, $1 \leq n_i \leq 9$, kun $i = 1, 2, ..., m$, on ennakoivan joukon X lukujen joukko.

Huomautus 6.3. Ennakoivan joukon X solujen joukon $\{c(i_1, j_1), ..., c(i_m, j_m)\}$ alkioiden kandidaatteja ovat siis ainoastaan joukko $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ tai sen osajoukot.

Joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ m kappaletta alkioita ovat siis m solun kandidaatteja. Kaikki m joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alkiota eivät välttämättä ole kaikkien m solun kandidaatteja, vain osa niistä on. Tässä vaiheessa ei vielä tiedetä, miten nämä joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alkiot jakaantuvat m soluun.

279	4	29
279	3	12789
6	1278	5

Taulukko 7: Laatikko $L1$, Esimerkki 6.4

Esimerkki 6.4. Tarkastellaan erään sudokun laatikkoa $L1$, Taulukko 7. Vihjeinä on annettu solujen $c(1, 2)$, $c(2, 2)$, $c(3, 1)$ ja $c(3, 3)$ pakolliset numerot 4, 3, 6 ja 5. Muihin tyhjiin soluihin on tehty niiden merkinnät. Tarkastellaan nyt soluja $c(1, 1)$, $c(1, 3)$ ja $c(2, 1)$. Näiden solujen kandidaattien joukko on joukko $\{2, 7, 9\}$. On löytynyt ennakoiva joukko

$$X_1 = \{\{2, 7, 9\}, \{c(1, 1), c(1, 3), c(2, 1)\}\}.$$

Solujen $c(1, 1)$ ja $c(2, 1)$ kandidaatteja ovat kaikki joukon $\{2, 7, 9\}$ alkiot, kun taas solun $c(1, 3)$ kandidaatteja ovat joukon $\{2, 7, 9\}$ osajoukon $\{2, 9\}$ alkiot.

Määritelmä 6.5. *Ennakoivan joukon alue* on se rivi, sarake tai laatikko, missä ennakoivan joukon X solut $\{c(i_1, j_1), ..., c(i_m, j_m)\}$ sijaitsevat.

Jos $m = 2$, (tai $m = 3$), niin ennakoivan joukon alue voi olla rivin ja laatikon tai sarakkeen ja laatikon yhdistelmä, koska ennakoivan joukon kaksi, (tai kolme), solua voivat sijaita sekä samassa rivissä/sarakkeessa ja samassa laatikossa.

Koska kaikki m joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alkiota liittyvät m soluun, niin mikään joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alkioista ei voi enää olla ennakoivan joukon alueella ennakoivan joukon ulkopuolisten solujen kandidaatti.

Lause 6.6. *Olkoon* $X = \{\{n_1, n_2, ..., n_m\}, \{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\}\}$ *sudokun ennakoiva joukko. Tällöin mikään joukon* $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ *alkio, joka esiintyy niiden solujen merkinnöissä, jotka eivät kuulu ennakoivaan joukkoon* X*, mutta kuuluvat ennakoivan joukon* X *alueeseen, ei voi olla sudokun ratkaisussa.*

Todistus. Jos ennakoivan joukon X jokin alkio n_i, $i = 1, 2, ..., m$, olisi ennakoivan joukon X ulkopuolisen solun pakollinen numero, niin tällöin ennakoivan joukon X m solulla olisi kandidaatteja vain $m - 1$. Tämä tarkoittaa, että yhdellä ennakoivan joukon X m solulla ei ole pakollista numeroa ja siis sudokulla ei ole ratkaisua. Tästä seuraa ristiriita. Näin ollen, jotta voidaan jatkaa ratkaisua, on kaikki joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alkiot otettava ennakoivan joukon X ulkopuolisten solujen, jotka ovat kuitenkin ennakoivan joukon X alueessa, merkinnöistä pois. □

Kyseessä olevat luvut voidaan siis pyyhkiä ennakoivan joukon X ulkopuolisten solujen merkinnöistä pois. Ennakoivat joukot vastaavat kirjallisuudessa yleisimmin esiintyviä *alastomia* (naked) joukkoja. Ennakoivan joukon löytymisen jälkeen, ja kun ulkopuolisten solujen merkinnöistä on pyyhitty ennakoivassa joukossa esiintyvät luvut, löydetään lisää joukkoja. Kirjallisuudessa näitä kutsutaan *kätketyiksi* (hidden) joukoiksi.

Esimerkki 6.7. Tarkastellaan vielä Esimerkin 6.4 laatikkoa $L1$, Taulukko 7. Löytynyt ennakoiva joukko $X_1 = \{\{2, 7, 9\}, \{c(1, 1), c(1, 3), c(2, 1)\}\}$ on alaston kolmikko. Se on siis suoraan nähtävissä ja muodostuu kolmesta solusta. Ennakoivan joukon X_1 alue on Määritelmän 6.5 mukaan laatikko $L1$. Ennakoivan joukon X_1 alueessa solujen $c(2, 3)$ ja $c(3, 2)$ merkinnöissä esiintyy ennakoivan joukon X_1 lukuja. Lauseen 6.6 nojalla luvut 2, 7 ja 9 on poistettava solujen $c(2, 3)$ ja $c(3, 2)$ merkinnöistä, katso Taulukko 8. Nyt löydetään uusi ennakoiva joukko $X_2 = \{\{1, 8\}, \{c(2, 3), c(3, 2)\}\}$, joka on kätketty kaksikko (hidden pair).

279	4	29
279	3	18
6	18	5

Taulukko 8: Ennakoivan joukon lukujen poisto ulkopuolisista soluista

6.2 Algoritmi

James Crookin algoritmissa on viisi vaihetta. Ensin tulee etsiä kaikki pakolliset numerot. Tämän jälkeen merkitään jokaiseen soluun sen kandidaatit.

Seuraavaksi etsitään ennakoivia joukkoja, joiden avulla solujen kandidaatit vähenevät ja löydetään lisää pakollisia numeroita. Ennakoivia joukkoja etsitään niin kauan, kunnes päädytään ratkaisuun. Jos ratkaisua ei kuitenkaan löydy, on suoritettava sattumanvarainen valinta, jossa yksinkertaisesti valitaan soluun pakolliseksi numneroksi yksi sen merkinnässä olevista kandidaateista.

Pakollisia numeroita etsitään *skannaamalla*. Aloitetaan siitä joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ alkiosta, jolla on suurin frekvenssi sudokun alkutilanteessa. Jos esimerkiksi luku 5 esiintyy useammin vihjeissä kuin muut luvut, niin etsitään aluksi kaikki ne solut, joissa luku 5 on pakollisena numerona. Seuraavaksi edetään alkioon, jonka frekvenssi on toiseksi suurin. Sudokun säännöt ovat skannaamisen lähtökohtana.

Kun kaikki pakolliset luvut on löydetty, tehdään jokaiseen tyhjään soluun solun *merkinnät*. Jos jonkin solun merkinnöissä on vain yksi luku, on tämä solun pakollinen numero.

Kandidaattien merkitseminen jälkeen etsitään *ennakoivia joukkoja* iteroimalla. Käydään läpi jokainen rivi, sarake ja laatikko. Ennakoivan joukon löydyttyä ennakoivan joukon alueen ennakoivan joukon ulkopuolisten solujen merkinnöistä poistetaan ne kandidaatit, jotka ovat ennakoivassa joukossa. Skannataan uudestaan ja etsitään ennakoivan joukon löytymisen ansioista esiin tulleet pakolliset numerot. Pakolliset numerot kannattaa numeroida yläindeksiin löytymisjärjestyksellä. Virheen huomatessa voi tämän ansiosta edetä algoritmissa takaperin. Vasta tämän jälkeen etsitään seuraava ennakoiva joukko. Löytyneitä ennakoivia joukkoja pilkotaan pienemmiksi muiden ennakoivien joukkojen avulla.

Useimmissa sudokuissa päästään *ratkaisuun* pelkällä ennakoivien joukkojen ja pakollisten numeroiden etsimisellä. Joskus tarvitaan kuitenkin tehdä sattumanvarainen valinta.

Määritelmä 6.8. Kun ennakoivia joukkoja ei enää löydy, mutta sudokua ei ole vielä ratkaistu, on tehtävä *sattumanvarainen valinta*. Valitaan yksi tyhjä solu, johon valitaan pakolliseksi numeroksi sattumanvaraisesti yksi sen merkinnän kandidaateista.

Algoritmia jatketaan tämän jälkeen normaalisti. Etsitään kaikki sattumanvaraisen valinnan seurauksesta esiin tulevat pakolliset numerot ja sitten etsitään ennakoivia joukkoja. Sattumanvaraisesta valinnasta lähtien tulee käyttää eri väristä kynää, jolla merkitään tästä solusta edetty polku.

Nimensä mukaisesti sattumanvarainen valinta voi johtaa siihen, että ratkaisua ei löydy. Sattumanvarainen valinta on mennyt väärin, jos samaan riviin, sarakkeeseen tai laatikkoon tulee kaksi samaa lukua. Nyt eri värisellä kynällä merkitty polku tulee pyyhkiä. Sattumanvaraisessa valinnassa valitun solun merkinnästä voidaan nyt poistaa se kandidaatti, jonka seurauksesta ratkaisua ei löytynyt.

Sattumanvarainen valinta tehdään uudelleen samassa solussa jäljelle jääneiden kandidaattien välillä. Joskus joudutaan tekemään useampi sattumanvarainen valinta ja ratkaisuun pääseminen onkin monimutkaista. Tarkastellaan algoritmia esimerkin avulla.

	9		7			8	6	
	3	1			5		2	
8		6						
		7		5				6
			3		7			
5				1		7		
						1		9
	2		6			3	5	
	5	4			8		7	

Kuva 11: Esimerkin 6.9 sudoku,[5, s.466]

Esimerkki 6.9. Kuvan 11 sudoku on vaikeustasoltaan haastava. Alkutilanteessa on annettu 28 vihjettä. Ratkaistaan sudoku Crookin algoritmilla. Aluksi etsitään kaikki pakolliset numerot. Aloitetaan frekvenssiltään suurimmasta luvusta, esimerkiksi luvusta 6. Huomataan, että ainoa sopiva solu luvulle 6 laatikossa $L2$ on solu $c(2,5)$, sillä riveillä 1 ja 3 ja sarakkeessa 4 on jo kyseessä oleva luku. Muut pakolliset numerot löydetään vastaavalla päättelyllä, katso Kuva 12.

Seuraavaksi tehdään kaikkiin tyhjiin soluihin niiden merkinnät, katso Taulukko 9. Sitten etsitään ennakoivia joukkoja. Heti toisella rivillä huomataan ennakoiva joukko $X_1 = \{\{4,7\},\{c(2,1),c(2,9)\}\}$. Nyt Lauseen 6.6 nojalla luku 4 on poistettava solun $c(2,7)$ merkinnästä, jolloin solun $c(2,7)$ pakolliseksi numeroksi tulee luku 9, katso Taulukko 10.

2	9	5	7			8	6	
	3	1	8	6	5		2	
8		6						
		7		5				6
			3	8	7			
5				1	6	7		
			5			1		9
	2		6			3	5	
	5	4			8	6	7	2

Kuva 12: Sudokun 11 pakolliset numerot täydennetty

2	9	5	7	34	134	8	6	134
47	3	1	8	6	5	49	2	47
8	47	6	1249	2349	12349	459	1349	13457
1349	148	7	249	5	249	249	13489	6
1469	146	29	3	8	7	2459	149	145
5	48	2389	249	1	6	7	3489	348
367	678	38	5	2347	234	1	48	9
179	2	89	6	479	149	3	5	48
139	5	4	19	39	8	6	7	2

Taulukko 9: Tyhjien solujen merkinnät

Rivillä 4 löydetään toinen ennakoiva joukko

$$X_2 = \{\{2,4,9\}, \{c(4,4), c(4,6), c(4,7)\}\}.$$

Nyt rivin 4 muiden solujen merkinnöistä tulee poistaa ennakoivan joukon X_2 luvut. Jäljelle jää ennakoiva joukko $X_3 = \{\{1,3,8\}, \{c(4,1), c(4,2), c(4,8)\}\}$, katso Taulukko 10.

Jokaisen rivin, sarakkeen ja laatikon tyhjät solut muodostavat ennakoivia joukkoja. Näistä ei kuitenkaan tässä vaiheessa ole hyötyä, sillä kandidaatteja ei pystytä poistamaan solujen merkinnöistä. On turvauduttava sattumanvaraiseen valintaan. Valitaan esimerkiksi tyhjä solu $c(2,1)$, jonka kandidaatteja ovat luvut 4 ja 7. Valitaan jompikumpi näistä luvuista sattumanvaraisesti pakolliseksi numeroksi soluun $c(2,1)$. Olkoon valinta esimerkiksi luku 4.

Nyt solu $c(2,1)$ aloittaa sattumanvaraisesta valinnasta alkavan polun. Käytetään tässä polussa punaista väriä ja merkitään löydetyt pakolliset numerot yläindeksillä löytymisjärjestyksessä, katso Taulukko 10.

2	9	5	7	34	134	8	6	134
4^1	3	1	8	6	5	9	2	7^3
8	7^2	6	1249	2349	12349	459	1349	1345
13	18	7	249	5	249	249	138	6
169	146	29	3	8	7	2459	149	145
5	48	2389	249	1	6	7	3489	348
367	68	38	5	2347	234	1	48	9
179	2	89	6	479	149	3	5	48
139	5	4	19	39	8	6	7	2

Taulukko 10: Sattumanvarainen valinta solussa $c(2,1)$.

Muita pakollisia numeroita ei löydy. Myöskään ennakoivia joukkoja ei löydetä, joten on tehtävä uusi sattumanvarainen valinta. Tehdään se esimerkiksi solussa $c(7,8)$, jonka kandidaatteja ovat luvut 4 ja 8. Valitaan esimerkiksi luku 4. Etsitään muita pakollisia lukuja ja ennakoivia joukkoja. Huomataan, että sattumanvarainen valinta solussa $c(7,8)$ on mennyt väärin ja sudokua ei saada ratkaistua.

On palattava soluun $c(7,8)$. Nyt kandidaatti luku 4 voidaan poistaa, jolloin solun $c(7,8)$ pakolliseksi numeroksi jää siis luku 8. Käytetään toisesta sattumanvaraisesta valinnasta lähtevällä polulla vihreää väriä, katso Taulukko 11. Vihreällä polulla solujen kandidaatteja saadaan vähennettyä pakollisten numeroiden tai ennakoivien joukkojen löydyttyä, jolloin lopulta päästään ratkaisuun, Kuva 13.

2	9	5	7	4^{24}	3^{37}	8	6	1^{40}
4^{1}	3	1	8	6	5	9	2	7^{3}
8	7^{2}	6	1^{34}	9^{27}	2^{38}	5^{21}	4^{19}	3^{41}
3^{14}	8^{13}	7	4^{28}	5	9^{39}	2^{29}	1^{17}	6
6^{15}	1^{12}	2^{31}	3	8	7	4^{30}	9^{20}	5^{16}
5	4^{7}	9^{32}	2^{33}	1	6	7	3^{18}	8^{6}
7^{11}	6^{8}	3^{9}	5	2^{25}	4^{26}	1	8^{4}	9
9^{42}	2	8^{10}	6	7^{22}	1^{36}	3	5	4^{5}
1^{43}	5	4	9^{35}	3^{23}	8	6	7	2

Taulukko 11: Sattumanvarainen valinta solussa $c(7,8)$.

2	9	5	7	4	3	8	6	1
4	3	1	8	6	5	9	2	7
8	7	6	1	9	2	5	4	3
3	8	7	4	5	9	2	1	6
6	1	2	3	8	7	4	9	5
5	4	9	2	1	6	7	3	8
7	6	3	5	2	4	1	8	9
9	2	8	6	7	1	3	5	4
1	5	4	9	3	8	6	7	2

Kuva 13: Sudoku 11 ratkaistuna

7 Sudokumaailman ihmeitä

Sudokujen yleistyessä kehitellään aina vaan erilaisempia variaatioita normaalista sudokusta. Perussudokut eivät enää riitä noviiseille, vaan vaikeustasoa tulee nostaa. Astetta 3 olevia sudokuja on satoja triljoonia, joista varmasti riittää tekemistä kaikille. Kuitenkin mielenkiinnon kohteena ovat myös muut sudokunkaltaiset pelit.

7.1 Sudokun vaikeustason määrittäminen

Sudokunlaatijoilla on omia tapoja määritellä sudokujen vaikeustasoa. Useimmat tavat perustuvat erilaisten ratkaisutekniikoiden pisteytykseen. Pisteytettyään sudokut laatijat merkitsevät sudokun vaikeustason tähdillä. Tähtiluokituksessa yhden tähden sudoku on helpoin ja viiden tähden vaikein.

Vaikeustasoon vaikuttaa, kuinka monta vihjettä alkutilanteessa on annettu. Mitä vähemmän vihjeitä, sitä vaikeampi sudoku. Kuitenkaan maailman vaikeimmassa sudokussa, Kappale 7.2, ei ole vähimmäismäärä vihjeitä. Se, missä soluissa vihjeet sijaitsevat, vaikuttaa myös ratkaisevasti sudokun haastavuuteen. Helpommissa sudokuissa vihjeet on sijoiteltu joka puolelle ruudukkoa, kun taas vaikeammissa sudokuissa vihjeet sijaitsevat ryppäissä.[12, s.139]

Suomalaisen Arto Inkalan kehittämä kaava (7.1) perustuu siihen, kuinka monta kandidaattia solusta on eliminoitava ennen, kuin löytää solun pakollisen numeron. Kandidaatteja voidaan eliminoida eri tekniikoilla, esimerkiksi Kappaleen 6.2 algoritmilla. Linkitys tarkoittaa sitä, kuinka kauaksi päättelyketjussa täytyy mennä, jotta saa jonkin kandidaatin eliminoitua. Vaikeustaso lasketaan kaavalla

$$P = \sum_{t=1}^{n} k^{S_t}, \tag{7.1}$$

missä
P =sudokun vaikeustaso,
n =eliminointiin tarvittavien tekniikoiden lukumäärä,
S_t =vaadittavien linkitysaskelten lukumäärä eliminointikerralla t ja
$k = 2,3$ (valittu kerroin, joka kuvaa yhtä pidemmän linkitysketjun vaikeutta edelliseen).[10]

7.2 Maailman vaikein sudoku

Maailman vaikeimman sudokun, Kuva 14, on luonut suomalainen Arto Inkala vuonna 2012. Inkala on kehittänyt maailman vaikeimpia sudokuja vuodesta 2006, jolloin hän kehitti sudokun nimeltä AI Etana. Kyseinen sudoku sai aikanaan yhtä paljon kansainvälistä julkisuutta kuin tämä vuonna 2012 ilmestynyt sudoku.

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

Kuva 14: Maailman vaikein sudoku,[17]

Maailman vaikein sudoku on saanut tähtiluokituksessa 11 tähteä. Jopa tästäkin vaikeampia sudokuja voi löytyä, ainakin 12 tähden sudoku on mahdollinen. Inkalan kehittämällä kaavalla (7.1) esimerkiksi sudokun AI Etana pisteiksi tulee 2043, josta sitten pääteltiin sen olleen vuonna 2006 maailman vaikein.[17]

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

Kuva 15: Maailman vaikeimman sudokun ratkaisu

Maailman vaikeimman sudokun, Kuva 14, luomiseen tarvittiin aikaa kuukausia. Sudokun laatimiseen Inkala käytti kehittämäänsä tietokoneohjelmaa. Ajan kanssa tämän sudokun pystyy ratkaisemaan kynän ja paperin avulla. Tietokoneohjelmalla ratkaisu, Kuva 15, paljastuu hetkessä.

7.3 Sudokun variaatioita

Sudokussa ei ole välttämätöntä käyttää juuri lukuja $1, 2, ..., 9$. Sudokussa voidaan käyttää esimerkiksi kirjaimia tai jopa yhdeksää eri väriä. Sudokun solmuja voidaan siis värittää luvuilla, kirjaimilla tai millä tahansa eri symboleilla. Sudokut voivat olla myös monenkokoisia. Säännöt ovat samat riippumatta sudokun asteesta. Myöskin laatikoiden kokoa ja muotoa voidaan vaihdella ja näin saada uusia samankaltaisia pelejä.

Pienin sudoku on astetta 2 ja sen koko on 4×4. Tämä *Minisudoku* on jaettu neljään laatikkoon, jotka ovat kokoa 2×2. Astetta 4 olevaa sudokua kutsutaan *Supersudokuksi*. Kokoa 16×16 oleva ruudukko on jaettu 16 laatikkoon, jotka ovat kokoa 4×4. Solujen värittämiseen on varattu 16 symbolia; luvut $0, 1, ..., 9$ ja kirjaimet $A, B, ..., F$. Jokainen symboli tulee saada kerran kuhunkin riviin, sarakkeeseen ja laatikkoon. *Jättiläissudokun* koko on 25×25.[12, s.7]

Sudokun laatikoiden ei aina tarvitse olla neliönmuotoisia. Kokoa 6×6 oleva sudoku on jaettu kuuteen 2×3 laatikkoon. Jokaiseen riviin, sarakkeeseen ja laatikkoon tulee saada luvut $1, 2, ..., 6$.

Astetta 3 olevaa sudokua, jossa käytetään ainoastaan kirjaimia, kutsutaan *Wordokuksi*. Wordokun säännöt ovat tismalleen samat kuin sudokussa normaalisti. Kirjaimia on 9 kappaletta ja ne voivat esimerkiksi muodostaa jonkin sanan. Useasti Wordokussa kirjaimet muodostavat sudokun diagonaalille sanan. Myös muita lyhyempiä sanoja voi muodostua ruudukkoon.

Esimerkki 7.1. Kuvan 16 Wordokussa on käytetty kirjaimia A, D, E, H, I, K, N, S ja T. Diagonaalille muodostuu sana KAHDEKSAN.

Normaalista sudokusta voidaan vaihtaa numerot siten, että ne ovat *modulo* 9. Koska $9 \ mod \ 9 = 0$, niin sudokun soluihin tulee nyt luvut $0, 1, ..., 8$. Määritellään kaksi erikoistapausta, joissa käytetään symboleina lukuja $0, 1, ..., 8$. Määritelmän 3.8 nojalla jokaisella laatikolla on kolme miniriviä, kolme minisaraketta ja kaksi minidiagonaalia.

K	E	D	T	A	H	N	I	S
I	A	N	S	K	E	T	H	D
S	T	H	N	I	D	A	E	K
E	S	I	D	H	T	K	N	A
T	H	K	A	E	N	D	S	I
N	D	A	I	S	K	H	T	E
D	I	T	E	N	A	S	K	H
H	N	E	K	D	S	I	A	T
A	K	S	H	T	I	E	D	N

Kuva 16: Wordoku

Määritelmä 7.2. Astetta 3 olevassa *Moduuli-taika sudokussa* jokaiseen riviin, sarakkeeseen ja 3×3 laatikkoon tulee saada luvut $0, 1, ..., 8$, täsmälleen kerran siten, että jokaisen laatikon minirivissä, minisarakkeessa ja minidiagonaalissa olevien lukujen summa on jaollinen luvulla 9.[1, s.2]

0	2	7	3	1	5	6	4	8
1	3	5	8	6	4	2	0	7
8	4	6	7	2	0	1	5	3
3	5	1	6	4	8	0	7	2
4	6	8	2	0	7	5	3	1
2	7	0	1	5	3	4	8	6
6	8	4	0	7	2	3	1	5
7	0	2	5	3	1	8	6	4
5	1	3	4	8	6	7	2	0

Kuva 17: Moduuli-taika sudoku,[1, s.2]

Esimerkki 7.3. Kuvan 17 sudokussa jokaisen laatikon minirivien, minisarakkeiden ja minidiagonaalien summa on jaollinen luvulla 9. Esimerkiksi laatikon $L5$ ensimmäisen minirivin summaksi tulee $6 + 4 + 8 = 18$, joka on jaollinen luvulla 9.

Määritelmä 7.4. Astetta 3 olevassa *Puoli-taika sudokussa* jokaiseen riviin, sarakkeeseen ja 3×3 laatikkoon tulee saada luvut $0, 1, ..., 8$ täsmälleen kerran siten, että jokaisen laatikon minirivissä ja minisarakkeessa olevien lukujen summa on 12.

Minidiagonaalien summaa ei siis Puoli-taika sudokussa huomioida. Puoli-taika sudokun minirivit ja minisarakkeet voivat muodostua vain tiettyjen joukkojen alkioista, joiden summa on tasan 12.

Lause 7.5. *Puoli-taika sudokussa minirivien tulee olla joukkojen* $\{0,4,8\}$, $\{5,6,1\}$ *ja* $\{7,2,3\}$ *permutaatioita ja minisarakkeiden joukkojen* $\{0,5,7\}$, $\{4,6,2\}$ *ja* $\{8,1,3\}$ *permutaatioita, tai toisinpäin.*

Todistus. Joukot $\{0,4,8\}$, $\{5,6,1\}$ ja $\{7,2,3\}$ ja joukot $\{0,5,7\}$, $\{4,6,2\}$ ja $\{8,1,3\}$ ovat ainoat joukon $\{0,1,...,8\}$ jaottelut osajoukkoihin siten, että jokaisessa osajoukossa on kolme alkiota ja jokaisen osajoukon alkioiden summa on 12.[1, s.7] $\square$

Aikaisemmin on käsitelty tasossa sijaitsevia sudokuja. Sudokut voivat sijaita myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Tälläinen peli, nimeltään *Dion Cube*, on kuutio, jonka jokainen tahko on kokoa 9×9. Tahkoja on kuusi kappaletta ja jokaisessa niissä ratkaistaan normaali sudoku. Tahkojen sudokut ovat kuitenkin riippuvaisia toisistaan. Särmän molemmin puolin sijaitsevissa soluissa tulee olla samat luvut. Myös kuution sisällä oleviin tasoihin liittyy sääntöjä. Vaakasuunnassa oleviin yhdeksään tasoon, mukaan lukien molemmat pohjat, tulee saada jokaiseen riviin ja sarakkeeseen luvut $1, 2, ..., 9$. Sama pätee pystysuunnassa oleviin yhdeksään tasoon. Kuutio sisältää siis $9^3 = 729$ kappaletta pieniä kuutioita, jonka jokaiseen tahkoon tulee sama luku.[4]

Viitteet

[1] Arnold, E., Field, R., Lucas, S., Taalman, L., *Nest graphs and minimal complete symmetry groups for magic Sudoku variants*, 2012,

http://educ.jmu.edu/~taalmala/sudoku_minimal_magic_submitted.pdf

[2] Boyer, C., *Tieteiden kuningatar*, New Jersey : John Wiley and Sons, 1968.

[3] Chartrand, G., Zhang, P., *Chromatic Graph Theory*, Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2009.

[4] Church, D., *The Dion Cube*, 2005,

http://www.sudoku.org.uk/PDF/Dion_Cube.pdf

[5] Crook, J. F., *A Pencil-and-Paper Algorithm for Solving Sudoku Puzzles*, Notices of the AMS 56(4) (2009), 460-468.

[6] Felgenhauer, B., Jarwis, A. F., *Mathematics of Sudoku I*, Mathematical Spectrum 39 (2006), 15-22.

[7] Felgenhauer, B., Jarwis, A. F., *Enumerating possible Sudoku grids*, 2005,

http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf

[8] Gross, J. L., Yellen J., *Graph Theory and its applications*, Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2006.

[9] Herzberg, A. M., Murty, M. R., *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*, Notices of the AMS 54(6) (2007), 708-717.

[10] Inkala, A., *AI SUDOKU*,

http://www.aisudoku.com/

[11] Karush, W., *Matematiikan käsikirja*, London : Macmillan, 1962.

[12] Lee, W. M., *Programming Sudoku*, New York : Springer-Verlag, 2006.

[13] Lehtinen, M., *Sudoku ja Matematiikka*, Solmu 1 (2006), 1.

[14] McGuire, G., Tugemann, B., Civario, G., *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*, 2012,

`http://www.math.ie/McGuire_V1.pdf`

[15] Royle, G., *Minimum Sudoku*,

`http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php`

[16] Russell, E., Jarwis, A. F., *Mathematics of Sudoku II*, Mathematical Spectrum 39 (2006), 54-58.

[17] Toivonen, J., *Maailman vaikein sudoku*, Helsingin sanomat (3.7.2012), A6.

[18] *Mathematics and Sudokus*, Math Explorer's Club, Cornell Department of Mathematics,

`http://www.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/meerkamp/Site/Introduction.html`

[19] *Sudokuja virtuooseille*, Köln : Vemag, 2012.